

研究報告書

「シャノン限界の実現と次世代情報通信理論の構築」

研究期間：平成 20 年 10 月～平成 24 年 3 月

研究者：平岡 裕章

1. 研究のねらい

本研究のねらいは高速・高信頼情報通信システムの為に必要となる数学的基礎理論を構築することである。具体的には2つのプロジェクト「シャノン限界を実現する実用的誤り訂正符号の開発」および「ネットワーク符号における層コホモロジーを用いた解析手法の開発」に取り組んだ。

2. 研究成果

【プロジェクト1:シャノン限界を実現する実用的誤り訂正符号の開発】

このプロジェクトではシャノン限界を実現する実用的誤り訂正符号を開発することを目指した。その方針は最尤推定復号の代数構造を調べることで高精度・低計算型近似復号法を提案することである。以下に得られた成果を3つに分けて報告する。

成果1. 最尤推定復号と同値な有理写像表現を導出しその力学系的性質を解明

本研究でもっとも独創的な点は最尤推定復号を有理写像として表現し、その有理写像の力学系的性質を通じて復号過程の骨格を抽出することである。具体的には各符号語(符号長を n とする)に符号語多項式と呼ばれる n 変数多項式を割り当て、それらを用いて区間 $I=[0,1]$ の直積

空間 I^n 上で有理写像 $f: I^n \rightarrow I^n$ を構成する。相空間は標数 0 の実数体を用いて定義されて

おり、各区間は条件付き確率に関する意味をもつ。ここで符号空間である有限体 $F_2 = \{0,1\}$ を区間 $I=[0,1]$ に自然に埋め込むことで、以下の性質を明らかにした。まず各符号語に対応する相空間上の点は有理写像の安定不動点である。また非符号語に対応する相空間上の点は不安定な不確定点であることも証明され、符号語と非符号語の有理写像における役割が明らかにさ

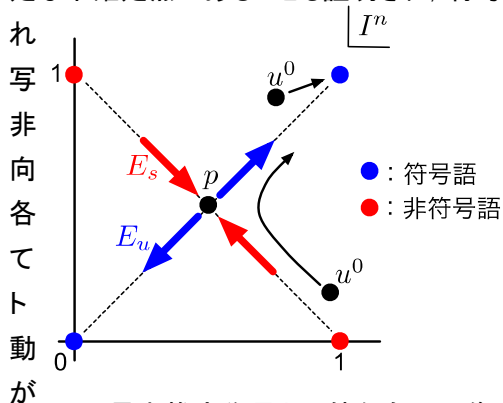


図1. 最尤推定復号と同値な有理写像力学系のダイナミクス

た。また相空間の中心点 $p=(1/2, \dots, 1/2)$ も有理写像の不動点であり、さらにその安定部分空間は符号語の方向、不安定部分空間は符号語の方を向いていることがわかった。最尤推定復号は受信語が定める初期値の有理写像力学系としての軌道を調べることに対応することから、セパリクス役割をする中心点近傍が定める漸近挙が、最尤推定復号を調べる上で重要であることがわかった。

成果2. 符号復号双対定理を証明し最尤推定復号の代数構造を解明

最尤推定復号の有理写像力学系としての研究から、中心点に最尤推定復号の情報が含まれていることが予想される。そこで有理写像を中心点でテイラー展開した近似多項式写像を用いて提案復号方式を提案した。高精度復号という観点からはテイラー展開の次数は多くとりたい。一方低計算という観点からは無駄な非線形項の係数は零であることが望ましい。本研究の理論的成果でもっとも重要な位置づけにある符号復号双対定理は、符号化の際の生成行列の代数構造をもちいることで、これら 2 つの要求を満足する誤り訂正符号を構成できることを証明した。これにより代数幾何符号で開発された符号化における種々の手法が復号化の設計に直接使用することが可能となった。特に最尤推定復号を代数的に調べることを可能とし、符号化の代数構造と確率推定型復号の性能についての新たな研究テーマを符号理論に提示することにつながった。

成果3. 提案復号方式の数値シミュレーションによる性能評価

提案復号方式の伝送誤り確率特性を数値シミュレーションにより解析した。図2は横軸を符号化率、縦軸を伝送誤り確率としたシミュレーション結果である。緑は2次、赤は3次の提案復号方式であり、符号化はランダム行列を用いて構成している。また比較のため BCH 符号（復号は Berlekamp 復号）についての計算結果を青のプロットとしてのせてある。計算結果から3次提案復号法は BCH 符号より良い特性を示すことがわかる。図3は横軸を通信路の遷移確率とし、符号化は全て共通の生成行列を用いた際の伝送誤り確率特性である。青は Berlekamp 復号、赤は提案復号(3次)、ピンクは最尤推定復号である。この数値シミュレーションから、提案復号方式は Berlekamp 復号に比べ著しく良い特性を示しており、理論限界値である最尤推定復号とほぼ同程度の特性であることが明らかになった。ここで比較の対象として用いた BCH 符号は誤

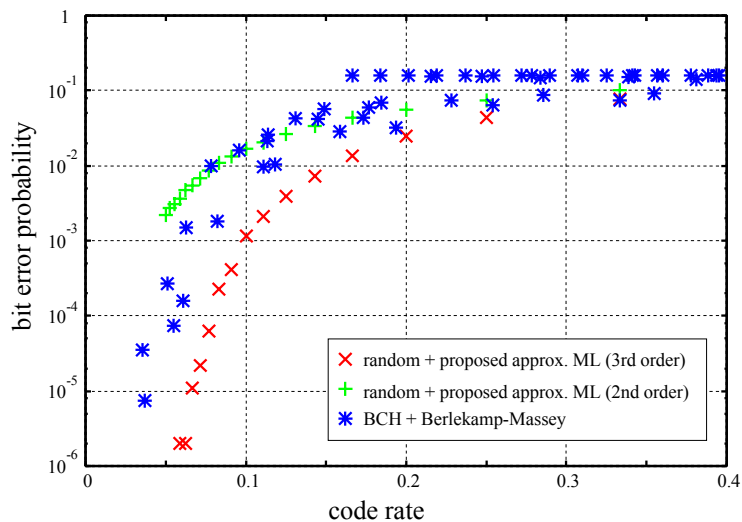


図2. 提案復号方式の性能評価(符号化率—伝送誤り確率特性)

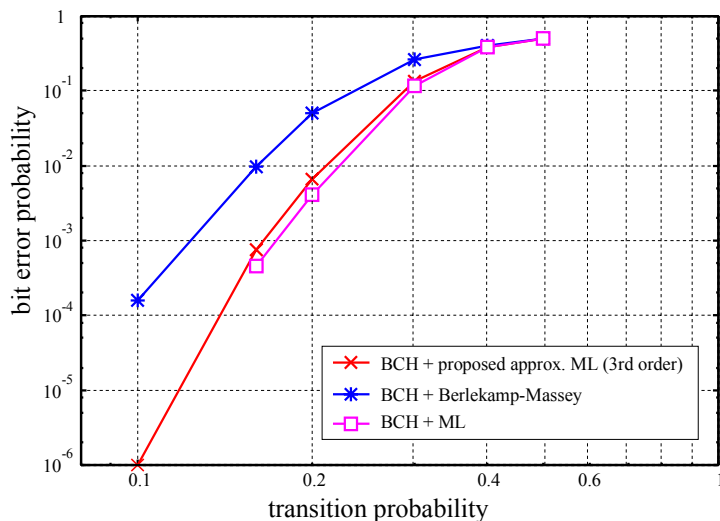


図3. 提案復号方式の性能評価(遷移確率—伝送誤り確率特性)

式であり、符号化はランダム行列を用いて構成している。また比較のため BCH 符号（復号は Berlekamp 復号）についての計算結果を青のプロットとしてのせてある。計算結果から3次提案復号法は BCH 符号より良い特性を示すことがわかる。図3は横軸を通信路の遷移確率とし、符号化は全て共通の生成行列を用いた際の伝送誤り確率特性である。青は Berlekamp 復号、赤は提案復号(3次)、ピンクは最尤推定復号である。この数値シミュレーションから、提案復号方式は Berlekamp 復号に比べ著しく良い特性を示しており、理論限界値である最尤推定復号とほぼ同程度の特性であることが明らかになった。ここで比較の対象として用いた BCH 符号は誤

り訂正符号の中でも高性能なものとして知られていることから、本提案復号法に更なる改良を加えることでより高性能な誤り訂正符号を開発できることが期待される。

【プロジェクト2:ネットワーク符号における層コホモロジーを用いた解析手法の開発】

このプロジェクトではネットワーク上での効率的情報伝送方式として注目されているネットワーク符号に対して新たな解析手法を提案し、実用化に向けた理論整備を進めることである。ここで提案した手法は層コホモロジーとそのホモロジー代数である。

成果1. 情報流の層コホモロジー表現

ネットワーク上の各のノードが定める局所符号化ルールを用いて層を構成し、その層係数コホモロジー群が情報流と1対1に対応することを証明した。この対応関係によりコホモロジーに対して定まる数学的演算(積構造, 引き戻し, テンソル積等)が情報理論的意味をもつことになる。またネットワーク上の情報流が全てコホモロジー群として記述できることから、導来圏上で議論することも可能とし、双対層などを調べることも可能となった。

成果2. ホモロジー代数の応用

コホモロジーの完全系列を成果1の対応関係のもとで適用することで、幾つかの実用的な問題へ応用できることを示した。例えば研究期間中に大域拡張問題と連結準同型写像, ネットワークの欠損問題と切除定理, 情報融合問題と Mayer-Vietoris 完全系列などの関係を明らかにした。

3. 今後の展開

プロジェクト1については符号化の代数構造と近似最尤推定復号の特性評価について更に研究を進めて行く。特に符号の自己同型群が近似有理写像に不変式環の構造をいれるが、その代数構造を用いて伝送誤り確率の解析的評価を行っていきたい。

プロジェクト2については実用化の際に重要な問題である複数ソース型容量決定に関する未解決問題に取り組みたい。その為に導来圏上で全ての議論を再構成し、Verdier 双対定理のネットワーク符号における意味付けなどを考察していく。

4. 自己評価

本研究で進めている最尤推定復号の代数構造は特に独創的な視点であり、このような新たな着想をもとに意味のある研究成果を挙げることができた点は評価したい。一方提案復号方式の伝送誤り確率の解析まで行うことができなかった。これについては今後更に研究を進めていき、シャノン限界を実現する符号開発を狙いたい。またネットワーク符号については現時点では層コホモロジー群という新たな視点が提供できたレベルであり、今後その有用性を示して行きたい。

5. 研究総括の見解

シャノン限界を実現する実用的誤り訂正符号の開発およびネットワーク符号における層コホモロジーを用いた解析手法の開発という共にこれまでにない視点と新たな手法を導入し、困難な問題への挑戦が感じられ頼もしい。実際、前者に対しては、最尤推定復号を有理写像として表現し、

その力学系的性質から復号過程を調べるという全く新たな手法を編み出し、これにより符号復号双対定理を証明し、最尤推定復号の代数構造の解明に成功した。

これにより平岡氏の提案する復号方式は現実の設計にも応用可能となり、数値シミュレーションにおいても、BCH 符号の性能と同等以上であり、理論限界値に近い結果を出したことは大いに評価できる。

後者の課題についても層コホモロジーやホモロジー代数を実用的問題への応用も含め、ネットワーク符号の理論整備への今後の発展が期待されるものとなっている。

6. 主な研究成果リスト

(1)論文(原著論文)発表

| |
|--|
| 1. K.Hayashi and Y. Hiraoka, Rational Maps and Maximum Likelihood Decodings. In press(JJIAM) |
| 2. R. Ghrist and Y. Hiraoka, Network Codings and Sheaf Cohomology, NOLTA 2011, 266-269. |
| 3. R. Ghrist and Y. Hiraoka, Applications of Sheaf Cohomology and Exact Sequences to Network Coding, 京都大学数理解析研究所講究録 1752, 31-40, 2011. |
| 4. 林和則, 平岡裕章, A dynamical system approach to coding theory: Rational map and maximum likelihood decodings, 京都大学数理解析研究所講究録 1742, 158-164, 2011. |

(2)特許出願

該当無し

(3)その他の成果(主要な学会発表、受賞、著作物等)

日本数学会発表:

有理写像と最尤推定復号: 符号一復号双対定理. 日本数学会2010年度秋期応用数学分科会, 2010年9月, 名古屋大学.

有理写像と最尤推定復号: 復号誤り率特性. 日本数学会2010年度秋期応用数学分科会, 2010年9月, 名古屋大学.

アメリカ数学会発表:

A dynamical system approach to coding theory: duality in algebraic geometry codes. AMS Sectional Meeting, Special Session on Topological and Computational Dynamics, May 2010, Newark.

Rational maps and maximum likelihood decoding: dynamical system and invariant theory in decodings, March 2012, Honolulu.

国際会議発表:

Network Codings and Sheaf Cohomology, NOLTA2011, September 2011, Kobe.