研 究 報 告 書

「真軌道によるシミュレーションの実現とその応用」

研究タイプ:通常型
研究期間: 平成 21 年 10 月～平成 25 年 3 月
研 究 者: 斉藤 朝輝

1. 研究のねらい

この研究課題では、計算機で正確に実行できる整数演算のみを用いて、区分的線形写像を含む区分的一次分数写像の真軌道生成法を確立し、さらに、それをカオス現象のシミュレーション解析に応用することを目的としていた。真軌道を使った誤差のないシミュレーションを可能にすることによって、カオス・非線形力学系の関連する諸分野(物理など)の新たな発展の道を拓くとともに、真軌道の情報通信(暗号通信など)への活用を可能にすることも、目指していた。

2. 研究成果

(1)概要

この研究課題では、研究テーマ A「真軌道生成法の確立」と研究テーマ B「真軌道生成法の応用」とに分けて研究を進めた。整数演算のみを用いて十分長い真軌道の生成が期待できるのは、区分的線形写像を含む区分的一次分数写像のみであると考えられるが、生成する方法自体は複数考えられる。研究テーマ A では、数表現として、(1) 3 次方程式の係数、(2) 連立 3 次方程式の係数、(3) 代数体の基底による展開から得られる有理数ベクトル、をそれぞれ用いて、真軌道生成法の構築を行った。特に、(3)の方法は、一般の区分的1次分数写像に適用可能な真軌道生成法となっている。また、この研究課題では、真軌道生成法を理論的に構成するだけでなく、実際に物理的に意味のある系などに適用して、その有効性を確認した。特に、研究テーマ B では、従来のシミュレーション法では精密な解析が困難であった、(1) Noise-Induced Order 現象、(2) Hamilton 系、を対象に、真軌道を用いたシミュレーション解析を行った。さらに、この真軌道生成法によって最も研究の発展が期待できる対象である、通常のカオスとは異なる特異性を示す力学系(学習・適応制御系など)の研究も併せて行った。

(2)詳細

研究テーマ A「真軌道生成法の確立」

(1). 3 次方程式の係数を使った 1 次元区分的 1 次分数写像の真軌道生成法

既約な整数係数 3 次多項式 px^3+qx^2+rx+s の唯一の実根として表される総実でない実 3 次無理数は、整数係数の組 (p,q,r,s) で表現できる。この数表現が、1 次元区分的 1 次分数写像の真軌道を生成する上で、有効であることを明らかにした。ただし、1 次元区分的 1 次分数写像は、$x \mapsto (ax+b)/(cx+d)$ という写像で、a,b,c,d は $ad-bc \neq 0$ をみたす整数である。特に、区分的写像を扱う上では、空間上の点がどの領域(区間)に含まれるかの判定を正確に行う必要があるが、この表現を用いる場合には領域判定を正確かつ簡単に行うことができる。この結果にもとづいて、1 次元区分的 1 次分数写像の真軌道生成法を構築した。さらに、実際に、確立した真軌道生成法を、Bernoulli 写像, Tent 写像, 変形 Bernoulli 写像などに適用し、その有効性を確認した。

図 1(a)および(b)は、Bernoulli 写像および変形 Bernoulli 写像の真軌道をそれぞれプロットしたものである。従来のシミュレーション法ではこれらの写像の軌道生成は非常に困難であったが、我々の方法により、これらの写像が典型的軌道として本来もっているカオス的および間欠的な真軌道を生成できる。また、図 2(a)および(b)は、得られた真軌道の統計的性質を調べるため、Bernoulli 写像および変形 Bernoulli 写像の不変測度を、それぞれ推定したものである。推定値(黒丸)は、それぞれの写像の不変密度(赤)とよく一致しており、我々の方法によって生成された真軌道は、よい統計的性質(典型的な軌道と同じ性質)を示すことがわかる。

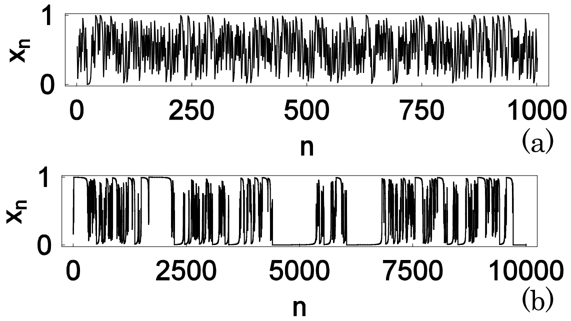

図 1: (a) Bernoulli 写像および(b) 変形 Bernoulli 写像の真軌道

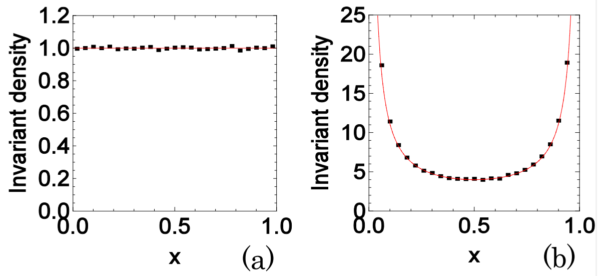

図 2: (a) Bernoulli 写像および(b) 変形 Bernoulli 写像の不変密度

(2). 連立 3 次方程式の係数を使った 2 次元区分的 1 次分数写像の真軌道生成法

2次元平面の点を整数係数の連立3次方程式の解で指定する場合、その点は連立3次方程式の整数係数の組で表現できる。この場合には、グレブナー基底を用いる領域判定法が有効であることが明らかとなった。この結果にもとづいて、2次元区分的 1 次分数写像の真軌道生成法を構築した。実際に、確立した2次元区分的 1 次分数写像の真軌道生成法を、パイこね変換, アーノルドの猫写像, Double dragon 写像, Jacobi-Perron Algorithm にともなう写像(JPA), Modified Jacobi-Perron Algorithm にともなう写像(MJPA)などに適用

し、その有効性を確認した。

図 3(a)と(b)は、JPA と MJPA の真軌道をプロットしたものである。これらの写像は多次元連分数アルゴリズムで用いられているものであるが、上に挙げた Bernoulli 写像等と同じく、従来のシミュレーション法を使って軌道生成を行うと問題が生じる。MJPA とは異なり、JPA では対角線 $y = x$ の上側で密度が高くなることが知られているが、我々の方法から得られた真軌道も、これと一致した傾向を示していることがわかる。JPA および MJPA では定義域が無限に分割されているが、このような写像に対しても、我々の真軌道生成法は適用可能である。

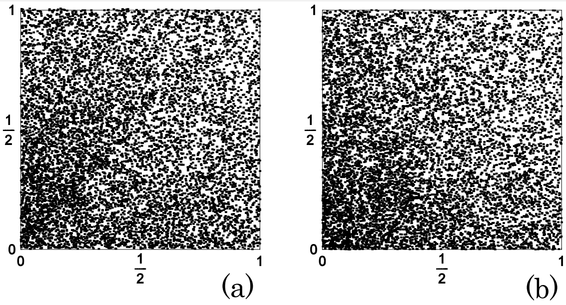

図 3: (a) JPA および(b) MJPA の真軌道

(3). 代数体の基底による展開にもとづく一般次元の区分的 1 次分数写像の真軌道生成法

有理数係数の n 次元区分的1次分数写像の真軌道を生成する上では、次数が $n+1$ より大きな代数体の基底による展開にもとづく数表現が有効であることが明らかとなった(区分的線形写像の場合には、総実でない実 3 次体を考えれば十分である)。この場合にも、領域判定は誤差なしで実行できる。この結果にもとづいて、一般の区分的 1 次分数写像に適用可能な真軌道生成法を構築した。さらに、実際に、確立した真軌道生成法を、(2)で扱った MJPA や Open Flow System (OFS)などに適用し、その有効性を確認した。

MJPA に関してはエルゴード的不変測度が具体的にわかっている。図 4 は、真軌道を用いて x 軸上の周辺密度の推定を行った結果である。理論値(赤)とよく一致することがわかる。また、図 5 は、100 次元区分的線形写像であらわされる OFS をシミュレートした結果である。倍精度浮動小数を用いたシミュレーション(赤)では系に存在しない人工的挙動(空間方向に分岐する4周期運動)が現れるのに対して、真軌道を用いたシミュレーション(青)では系が本来もつ安定1周期解に収束する。

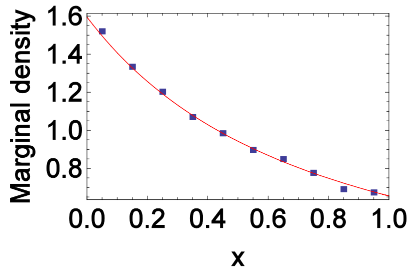

図 4: MJPA の x 軸上の周辺密度

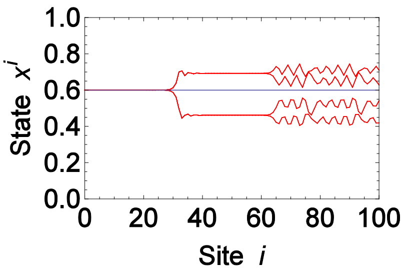

図 5: OFS のシミュレーション結果

研究テーマ B「真軌道生成法の応用」

(1). Noise-Induced Order 現象の真軌道シミュレーション

Noise-Induced Order 現象(NIO 現象)とは、Matsumoto と Tsuda によって発見された、ノイズによってカオスが壊され、ある種の周期性が現れる現象のことである。非線形現象の中

でも特に重要なものの一つと言えるが、従来の固定精度浮動小数点数を用いるシミュレーション法では、数値誤差が混入してしまうため、精密な解析が困難であった。一方で、ノイズの印加に関しては、例えば有理数ノイズに限ることにすれば、真軌道生成法の中に組み込むことが可能である。ここでは、真軌道生成法を Doi によって提案された TWFS (tent with a flat segment) 写像に用いることにより、誤差無しの NIO 現象のシミュレーションが可能であることを確認した(図 6)。また、高精度な分岐図の描画が可能であることも確認した。さらに、Doi によって提唱されたアトラクタ平均化仮説の検証も行った。特に、従来の方法では扱うことが不可能だった数値誤差のスケールでのシミュレーションを行い、例えば、Doi の行ったシミュレーションにおいて数値誤差による NIO が起こらなかったことに関して、説明を行った(図 7)。

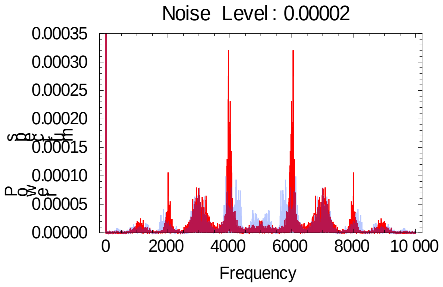

図 6: NIO 現象を示す鋭いピークを持つパワースペクトル

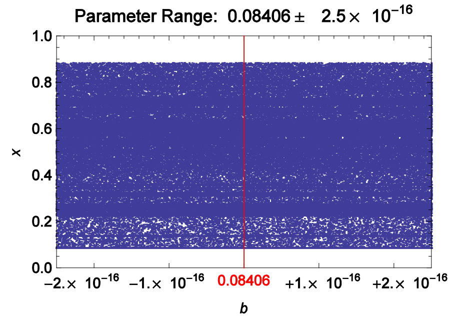

図 7:数値誤差と等しい幅をもつ分岐図(カオス領域が占有している)

(2). Hamilton 系の真軌道シミュレーション

Hamilton 系は正準方程式で記述される力学系で、古典力学における最も基本的な系の一つと言える。Hamilton 系で現れるカオスの研究では、これまで標準写像と呼ばれる 2 次元写像が広く用いられてきた。特に、相空間にトーラスが存在するかについて関心が持たれてきたが、数値誤差の混入する従来のシミュレーション法では、仮に極小のトーラスが存在したとしても、それを見つけ出すことは困難であった。真軌道シミュレーションを行うため、ここでは標準写像の 2 次元区分的線形写像版を用いた。図 8 は、あるパラメータで相空間の構造を描画したものである。真軌道シミュレーションでも、標準写像でよく知られている結果(例えば、KAM トーラスの崩壊やカオス領域の拡大など)が再現できることを確認した。また、加速モードトーラスの存在しないパラメータ領域に関して、トーラス(楕円型周期軌道)の探索も行った。しかしながら、現在までのところ、双曲型周期軌道は比較的簡単に見つかるものの、楕円型周期軌道の発見には至っていない(図 9)。

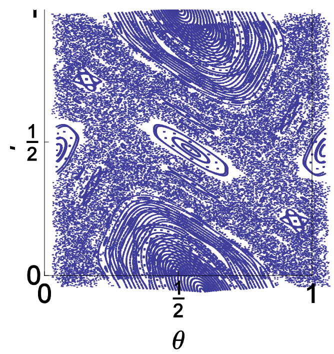

図 8: 最終 KAM トーラス崩壊後の相空間の構造

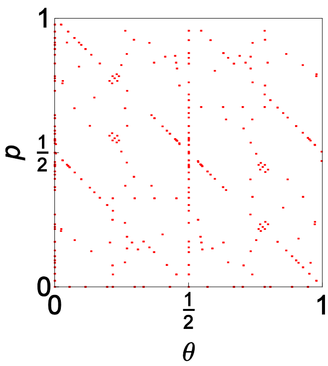

図 9: 楕円点を探す過程で見つかった双曲点

3．今後の展開

真軌道生成法の確立に関しては、一般の次元の区分的線形写像および区分的1次分数写像に適用可能な方法が構築できたことで、ひとまずは完結したといってよい（ただし、グレブナー基底を用いる領域判定法や、真軌道生成法の他のバリエーションなど、理論的に追いかけるとおもしろい話題は依然残っている）。今後は、真軌道生成法の応用に力を入れて取り組んでいきたい。特に、次の 3 方向での応用を目指している。

(1). 非線形系・複雑系の誤差のないシミュレーション解析

非線形科学や複雑系の分野には、数値誤差が系の性質を本質的に壊してしまう可能性があるにもかかわらず、これまで固定精度浮動小数点数を使ったシミュレーションを行わざるを得なかった対象が数多く存在する。このような対象の中でも、例えば、Noise-Induced Order 現象，Hamilton 系，カオス的遍歴現象，学習・記憶のダイナミクスなどを対象に、真軌道生成法を使ったシミュレーション解析を行っていきたい。非線形・複雑系の分野でも、特に重要な未解決課題と言えるこれらの対象に対して、真軌道生成法を使ったシミュレーション解析を推し進めることにより、今後これらの分野の研究の新たな発展を狙っていきたい。

(2). 数学への貢献

例えば、多次元連分数アルゴリズムである Jacobi-Perron Algorithm にともなう写像の不変密度は求まっていないが、真軌道を使ったシミュレーションで実験的に不変密度の厳密な形を推定できる可能性がある。このような数学での未解決問題に対しても、真軌道生成法を活用していきたい。

(3). 真軌道の工学的利用

不変測度などの性質のよくわかっている写像の真軌道を、例えば、擬似乱数生成，モンテカルロ法，情報通信（暗号通信など）などに活用することも目指していきたい。

以上の(1)から(3)を通して、真軌道シミュレーションという新しいシミュレーション法をさらに大きく発展させていきたい。

4．自己評価

この研究課題では、一般の次元の区分的線形写像および区分的1次分数写像に適用可能な真軌道生成法の構築を最大の目標としてきた。その目標が達成できたことは、第一に評価したい。従来のシミュレーション法とは比較にならないほど高精度な、真軌道によるシミュレーションを行う上での基礎が、この研究課題によってはじめて出来上がったと考えている。

また、真軌道生成法の理論的研究にとどまらず、実際に、それを Noise-Induced Order 現象，Hamilton 系，Open Flow System 等のシミュレーション解析に応用したことも、評価したい。これらの対象は、非線形科学分野の中でも挑戦的な対象といえるが、これらの研究を新たに発展させて行く上での足掛りを作れたと考えている。また、今後、真軌道シミュレーションという新しいシミュレーション法を活用していく上でのテストケースとしての意義もあったと考えている。

一方で、当初計画したよりも、真軌道生成法の応用に関する研究を推し進めることができなかった。特に、カオス的遍歴現象のシミュレーション解析には、手をつけることができていない。その原因としては、真軌道生成法の理論的な構築に時間をとられてしまったこと、また、選んだ対象がどれも非線形科学分野の未解決課題といってもよい対象で、重要な結果を得るため

には、それぞれの対象ごとに時間をかけた取り組みが必要だったこと、などが挙げられる。

5．　研究総括の見解

カオス解は初期値への敏感性を一つの特徴付けとして用いられるように数値計算でその正確な挙動を誤差なしで計算することには原理的な難しさが伴う。斉藤氏は区分的1次写像、区分的1次分数写像で表現できる力学系に対し、整数係数の（連立）3次方程式の解で相空間の点を指定するという巧みなアイデアを発案するなどし、それらの系で現れるカオス解の真軌道の計算機による生成に成功した。区分的1次あるいは分数写像という制約は付くが、この結果は計算機による複雑ダイナミクスを探究する際の大きな理論的支えとなる結果であり、大いに評価したい。その応用の発展性は言うまでもないが、同時にグレブナー基底の考えなど、代数学との関連もいろいろ出てきており、数学内部での深まりも期待される。

6．　主な研究成果リスト

（1）論文（原著論文）発表

1. Asaki Saito and Keiji Konish, Dynamical singularities in adaptive delayed-feedback control, Phys. Rev. E 84, 031902 (2011) [7 pages].

（2）特許出願

なし

（3）その他の成果（主要な学会発表、受賞、著作物、プレスリリース等）

1. 斉藤朝輝, 真軌道生成法の Noise-Induced Order 現象への応用, Workshop「数論とエルゴード理論」、金沢大学 (2011/2/19)
2. Asaki Saito, Shunji Ito, True Orbit Computation Using Integer Arithmetic, International Conference “Far-From-Equilibrium Dynamics 2011”, 京都大学 (2011/1/6)
3. 斉藤朝輝、伊藤俊次, 整数演算に基づくカオス写像の真軌道生成, 日本物理学会 2010 年秋季大会、大阪府立大学 (2010/9/24)
4. Asaki Saito, Shunji Ito, Realization of True Orbit Simulation Using Integer Arithmetic, International Workshop “Emerging Topics in Nonlinear Science”, Schloss Goldrain, Italy (2010/9/14)
5. Asaki Saito, Shunji Ito, Computation of true chaotic orbits using cubic surds, Workshop “Computability of discontinuous functions and related topics 09-1”, 京都産業大学 (2009/12/18)