研　究　報　告　書

「流れの位相的な文字化理論とその計算機上への実装」

研究タイプ：通常型
研究期間： 2016 年 10 月～2020 年 3 月
研 究 者： 横山　知郎

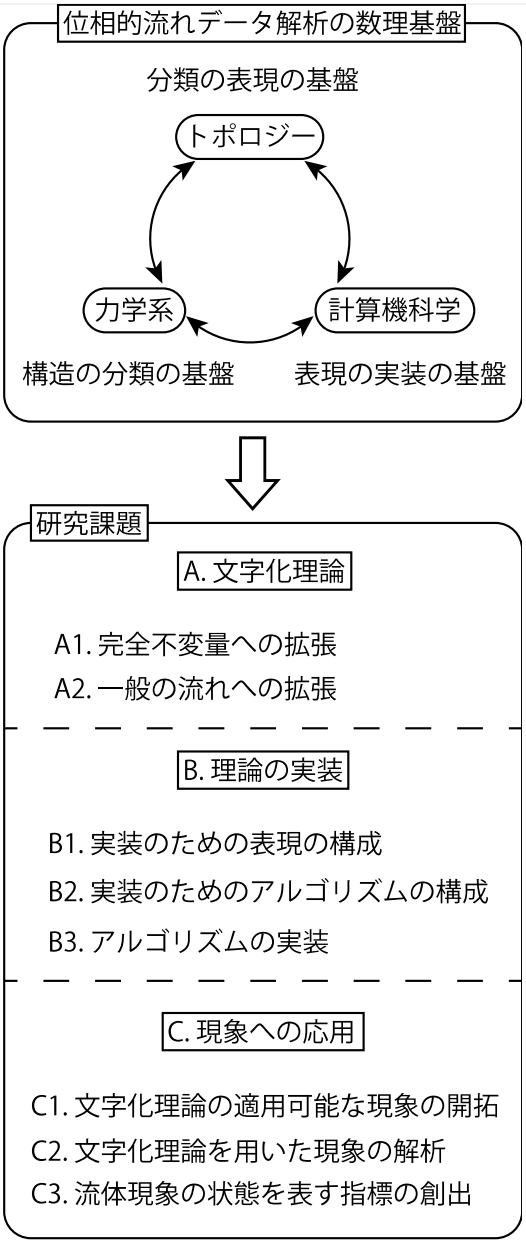
1．　研究のねらい

本研究で用いているトポロジーと力学系とは，親和性の高い分野であり，両分野とも Henri Poincaré と深く関係している分野である．実際，力学系は Poincaré によって始められた分野であり，天体力学における制限 3 体問題の可積分な系の摂動系が一般には非可積分であることが示された頃に，個々の方程式を調べることはできなくとも，ある種の微分方程式系に共通する性質を調べるという定性的な研究分野である．他方，トポロジーは，コーヒーカップとドーナツが同じ形とみなすような柔らかい構造によって分類をする幾何学である．特に，Poincaré によって，基本群，ホモトピー，単体的複体などの概念が提案され，現代のトポロジーの基礎が構築された．このように，トポロジーと力学系は，空間や流れを摂動しても不変な性質を調べるという共通した思想がある．一方，流体の研究において，摂動をしてもトポロジーが変わらないという構造安定性という性質はあまり注目されていなかった．また，力学系理論においても局所的な分岐の分類はされていたが，一般に起こりえる全ての遷移を記述するのに適した位相不変量がなかったため，一般に起こりえる全ての遷移を辺とするような流れの遷移グラフは構成されていなかった．そこで，流れの遷移グラフを構成できるような位相不変量を構成し，流れのデータを解析し，実社会での問題を解決することが本研究のねらいである．実際，本研究の開始時点では，穴あき円板上の Hamilton 流を多対一対応という粗い分類とその遷移グラフの局所的な遷移規則という理論のみが構成されていた．したがって，特定の曲面上の特定の流れを多対一という粗い記述しかできず，3 次元の流れのスライスなどとして得られる一般の流れは圧縮性をもっているため，実データへの文字化理論の適用が困難であった．そこで，Hamilton 曲面流に対する文字化理論を一般の曲面流や 3 次元空間内の流れに対して拡張することを目指す．さらに，この多対一対応というあいまいさをなくした一対一対応を構成することを目指す．また，さまざまな流体現象に理論を適用する上で，大量のデータを扱う必要があるので，遷移グラフの自動生成や流線データの位相の自動生成や流れデータの距離の自動検出というプログラムの実装を目指す．加えて，これらの理論と実装を用いて，社会問題の解決のための協働を目指す．

2．　研究成果

（1）概要

本研究は，トポロジーを用いて流れのデータを解析するという流体現象を解析するための数理的な基盤を構築し，実社会の流体現象に関わる問題解決のための新しい流れの解析手法を提案した．実際，理論面では，さまざまな流れのクラスに適用できるような位相的流れデータ解析の理論を構築した．特に，有限的な曲面流の完全不変量を構成し，数値計算で扱うような流れを記述できるようにし，穴あき球面上の Hamilton 流の一般的な遷移を全て記述できるようなった［論文 3]．さらに，既存の理論では難しかった再帰的な高次元の流れの構造を記述できるような位相不変量を構成した．実装面では，文字化理論の計算機上での実装に適した表現を構成し，これらを用いて，穴あき球面上の一般の曲面流に対して完全不変量の計算可能な表現を構成し，本研究成果は国内特許出願を行った．また，穴あき球面上の Hamilton 流の一般的な遷移を生成するアルゴリズムを計算機上に実装し，これらの流れのトポロジーに関する(擬)距離とそれらを生成するアルゴリズムを構成した．さらに，Hamilton 流のデータから流れのトポロジーを抜き出す計算可能なアルゴリズムを構成した[論文 5]．異分野協働面では，異分野協働面では，これらの理論と実装を用いて，定性的な流体現象の解析を行った．特に，本研究によって発展した一般の流れの文字化理論を用いて，3 次元空間内の流れの解析を行い，工学機械の改良を行った[プレスリリース 1]．



（2）詳細

研究テーマ A「流れの文字化理論の創出」

－ テーマ A1 完全不変量の構成

本サブテーマは，既存の Hamilton 流のトポロジーを多対一で分類する位相不変量の拡張を行った．この位相不変量は文字列として表現されるものであり，この表現を用いて，一般に起こりえる全ての遷移を記述した遷移グラフも構成されていた．一方，この文字列という表現は，多対一対応という特徴があるため，一般には起こりえる全ての遷移を記述できるが，一般に起こりえない遷移も記述してしまうという問題点があった．そのため，この一対一対応の完全不変量を構成し[論文 3]， Hamilton 流の一般的な遷移を全て記述できるようなった．

－ テーマ A2 一般の流れに対する文字化理論

本サブテーマは，既存の穴あき平面上のHamilton流の文字化理論をより一般の曲面流や3次元空間内の流れに対する理論への拡張を行った．実際，理論的に，穴あき平面のみならず全てのコンパクト曲面上の一般の曲面流の完全不変量を構成した．この拡張によって，力学系理論において重要な双曲的な流れや非圧縮な流れやその特殊な場合であるHamilton流をまとめて扱えるようになった．

研究テーマ B「流れの文字化理論の実装」

- テーマ B1 実装のための表現の構成

流れのデータを解析するために，流れの遷移規則を項の付け替えとして簡潔に表現できることが好ましい．さらに，理論の理解しやすさだけでなく，幅広いユーザーに使用してもらうために，表現がわかりやすいことも重要である．そこで，形式言語理論において，木構造を持ったデータを表すのに広く使われている正規木表現というものがあり，この表現に流体構造として現れる局所的な円順序構造を付加して，部分円順序木表現(partially Cyclically Ordered rooted Tree (COT) representation)という流体現象のトポロジーの表現を構成した．

- テーマ B2 実装のためのアルゴリズムの構成

流れの文字化理論を計算機上で実装する上で，実現可能な流れのトポロジーを全て自動生成可能で表現であることが好ましい．そこで，既存の表現を改良することにより，実現可能な Hamilton 曲面流のトポロジーを全て自動生成するアルゴリズムを構成した．さらに，与えたられたデータから流れのトポロジーを出力するアルゴリズムを構成し，そのトポロジーの違いを比較する基盤として遷移グラフを自動生成するアルゴリズムを構成した．

- テーマ B3 アルゴリズムの実装

オートマトンを用いることにより，実現可能な Hamilton 曲面流のトポロジーを全て自動生成するアルゴリズムを実装し，遷移規則を簡潔に記述し，遷移グラフを自動生成するアルゴリズムを実装した．本質的にパーシステントホモロジーを用いることで，与えたられたデータから流れのトポロジーを出力するアルゴリズムをプログラミングできることを見出した[論文 4]．さらに，COT 表現を入力として流線図を出力するアルゴリズムを実装した．

研究テーマ C「流体現象への文字化理論の応用」

- テーマ C1. 文字化理論の適用可能な現象の開拓

さきがけ研究者を中心とした異分野(液晶，フォログラフィー，CG，流体力学)の研究者を招聘しワークショップを開催し，異分野協働の可能性を探索し，研究者間のネットワークを拡張した．さらに，SciFoS(Science For Society)の活動を通して，企業や研究開発機構の研究者と議論をすることにより，さまざまな乗り物の周りの流体解析などに対して文字化理論を用いた解析が有効であるのではないかという示唆を得た．

- テーマ C2. 文字化理論を用いた現象の解析

3 次元空間内の流体現象であっても，軸回転対称性のある流れや一様性のある流れに対しては，そのスライスを取ることで得られる曲面流を解析することできる場合がある．一方，これらのスライスとして得られる曲面流は一般に非圧縮でも双曲的でないため，一般の流れの文字化理論を用いることにより解析できる．実際，分級機は回転対称性を持っているため，そのトポロジーを解析することにより，その性能を向上させた[プレスリリース 1]．さらに，これらの研究成果の元となる数理基盤に関する特許の国内出願を行った

- テーマ C3. 流体現象の状態を示す指標の創出

流れのトポロジーの距離という指標を提案した．これは，流れの遷移グラフの定義からくる副産物であり，異なる複数の流れがお互いにどれだけ遠いのかという指標として流体解析に用いることができる．実際，この流れのトポロジカルな距離は，流体機械の設計や制御をコントロールする新しい基準の一つとして活用できる．さらに，このトポロジーを用いた現象の距離を測るという手法は，流れ以外のデータに活用することもでき，さまざまな距離の基本となる．

3. 今後の展開

流れの文字化理論は，トポロジーを用いた流れのデータ解析という枠組みとして発展し，位相的流れデータ解析という新しい解析(Topological flow data analysis(TFDA))の枠組みの提唱へと繋がった．一方，Hamilton 曲面流の遷移グラフの理論と実装を行なったが，実際の流体現象の解析のためには，一般の曲面流の遷移グラフの構成や高次元の位相不変量の計算可能な表現の構成を実現する必要があり，今後はこれらの理論と実装を展開していく．

他方，本研究で発展させた曲面流のトポロジーの完全不変量や高次元空間内の流れの位相不変量を用いた実社会の問題解決のための協働は開始したばかりである．そのため，価値観を共有することにより問題意識を共有し，どのようなデータや解析を提供できるのか理解し，お互いにとって有意義な問題を見出し，問題解決を目指す．特に，これらの協働を通して，文字化理論を用いて，どのようなデータに対してどのような不変量や指標を提示できるかを明確にし，気軽に使えるような定性的な流体解析の道具となるように，位相的流れデータ解析の手法を確立する．

4. 自己評価

理論面では，流れの位相的な文字化理論を構成する研究は概ね実現できた．特に，曲面流については，ほとんどの流れに対する完全不変量を構成した．さらに，高次元空間内の流れについては，既存の理論で使われていた位相不変量を一般位相空間論や半順序理論の枠組みに翻訳することにより位相不変量を一般化した．特に，高次元内の流れに適用できるこの位相不変量は，これまでの位相不変量では区別が難しかった再帰的な不変集合内の振る舞いを分類でき，精度の高い分類能力を持ち，流れの分類の強力な道具であり，評価できる．さらに，数学の理論を現実問題に応用するという一方的な関係ではなく，反対の方向についても，現実の問題を解決するために力学系の曲面流の理論を発展させるという良い関係にあった．このように数学と現実問題が良い循環を成した点は非常に評価できる．実装面では，業務に適した人材の確保に時間を要し，アルゴリズムの実装の部分に遅れが出たが，計算機科学を用いて不変量の計算可能な表現の構成し，組み合わせ論や位相的データ解析の手法を用いて表現の実装の理論的な基盤を見出し，流れの文字化理論の実装を実現し，一定以上の成果が挙げられた．一方，計算機科学やプログラミングやデータ解析を一から学び直し，計算機やソフトウェアの購入し，データの解析やプログラミングを実行した．本研究を開始した当初は，データの解析やプログラミングについては全くの素人であったが，現在も素人の域を抜け出していないが，個人でデータ解析をするようになったことは，将来の研究や協働を行なっていく上で大きな意義がある．応用面では，協働をする研究者を見つけるきっかけを探すのが大変であったが，当初の予定していないかった数学領域内のワーキング

グループの立ち上げに伴い，異分野の研究者を招聘してワークショップを開催するなど，異分野連携が加速された．さらに，さきがけ交流会や数学領域内のワーキンググループの活動や SciFoS(Science For Society)の活動などの機会を通して，協働研究者と出会うことができ，協働のための議論を始められた．特に，目に見える結果につながっていない部分が多いが，さまざまな機会で交流を深め，流体力学や CG や計算機科学などの異分野の研究者とのネットワークを作れたことにより，自身の研究の幅も広げられ，今後の応用研究においてさらなる展開の基盤を構築できたことは，将来の研究や協働を行なっていく上で大きな意義がある．

5. 主な研究成果リスト

（1）論文（原著論文）発表

1. Y. Nakano, T. Yokoyama, Existence and Non-existence of Length Averages for Foliations, Communications in Mathematical Physics, (2019) 372(2), 367-383.
2. T. Yokoyama, Properness of foliations, Topology and its Applications (2019) 254, 171-175.
3. T. Sakajo, T. Yokoyama Tree representations of streamline topologies of structurally stable 2D Hamiltonian vector fields, IMA Journal of Applied Mathematics (2018) 83, Issue 3, 380-411
4. 宇田 智紀，横山 知郎，坂上 貴之，パーシステントホモロジーとレーブグラフを用いた 2 次元ハミルトンベクトル場の流線位相構造の自動抽出アルゴリズム，日本応用数理学会論文誌 (2019) 29, 2 187-224
5. 横山哲郎，横山知郎，ハミルトン曲面流に対応する流れの向きを考慮した極大語の列挙アルゴリズム，電子情報通信学会論文誌 (2018) J101-D, 8, 1220-1222

（2）特許出願

研究期間累積件数：1 件（公開前の出願件名については件数のみ記載）

（3）その他の成果（主要な学会発表、受賞、著作物、プレスリリース等）

主要な学会発表

1. Tomoo Yokoyama, Topological fluid data analysis: COT representations of surface flows and their implementations, 3rd Asia-Pacific Conference on Plasma Physics, 中国，2019，招待講演
2. Tomoo Yokoyama, Topological invariants of generic flows on compact surfaces and topological flow data analysis, Seminar cathedral on Monday, Moscow State University, Russia, 2019
3. 横山知郎，曲面流について，第 65 回トポロジーシンポジウム，信州大学，2018
4. Tomoo Yokoyama, Topological transitivity and representability of surfaces flows, DynamIC Seminars, Imperial College London, UK, 2017

プレスリリース

1. 流れの「かたち」解析による装置開発 ～流線位相データ解析による効率的粉体分級

装置の開発～

https://www.jst.go.jp/pr/announce/20190930-2/index.html