

# 研 究 報 告 書

## 「ヘテロ次元サイクルに着目した同期理論の構築—複雑現象の理解に向けて—」

研究タイプ: 通常型

研究期間: 2016 年 10 月～2020 年 3 月

研 究 者: 齊木 吉隆

### 1. 研究のねらい

流体乱流、気象、経済、金融等の複雑現象は、背後で多くの構成要素が絡み合っており、理解、予測、制御は困難です。その困難さの要因のひとつはそれらが示す間欠的なふるまいにあります。現象の高次元性から鑑みて、その間欠的なふるまいは不安定次元の異なる状態の共存に由来すると考えることは力学系理論の観点からみると自然です。不安定次元の異なる状態が共存する力学系研究は、これまで抽象理論の研究が主で、具体例の研究が不足していたため、その方向性の研究を推し進めることが期待されています。これまでに間欠性を示す力学系の理論的研究は同一素子の対称結合によるものが大半であったため、そうではない系を含めて間欠性を統一的に捉える手法を明らかにすることも求められています。一方、間欠的なふるまいを示す流体、気象、経済、金融時系列の分析はこれらの複雑現象の理解を目指す理論の構築を目指すために重要です。本研究ではこの種の複雑現象における間欠的な状態変化の理解、予測、制御につなげるために不安定次元の異なる状態が共存する力学系に関する具体例の研究を推し進めるとともに、間欠的現象の時系列分析をおこなって間欠的現象の理解を深めることが研究のねらいです。

### 2. 研究成果

#### (1) 概要

流体力学等の間欠性を示す決定論的な複雑現象では常に持ち合わせると考えられるヘテロカオス(不安定次元の異なる状態を経巡るカオス)に関する数値的研究をおこなった。まず、複数の低次元写像、常微分方程式で記述されるカオス力学系に関して詳細な数値解析をおこない、周期軌道を検出してその不安定次元を計測しヘテロカオス性の検証をおこなった。また、そのヘテロカオス性が起こるメカニズム(分岐)を考察した。次に、ひな形となりうるシンプルな写像(2次元写像、ならびにそれを可逆にした3次元写像)を提案して、実際、不安定次元の異なる周期点がそれぞれアトラクタで稠密であることや、その系がエルゴード的であることを証明した。また、ヒルベルト変換を用いた同期解析手法により、複数国為替時系列間にみられる購買力平価を基準とした同期・非同期状態間遷移を明らかにしたり、都道府県別鉱工業生産指数の月次データの間の同期・非同期状態間遷移を明らかにした。流体力学に関しては、リザーバーコンピューティングと呼ばれる機械学習を間欠性を示す流体マクロ変数に適用して、時間発展モデルを構築した。

#### (2) 詳細

主に以下の研究に従事した。

- i. ヘテロカオスの研究
- ii. 流体乱流のリザーバーコンピューティング
- iii. 準周期軌道とヘテロカオスにおけるその役割
- iv. 複数経済時系列間の同期解析

以下が各項目の状況説明である。

i. 流体乱流等の決定論的な複雑現象ではほぼ常に持ち合わせると考えられるヘテロカオス（不安定次元の異なる状態を経巡るカオス）に関するひな形となりうるシンプルな写像を提案した。実際、そこで提案した 2 次元写像ならびに 3 次元写像に対して、不安定次元の異なる周期点それぞれアトラクタで稠密であることや、その系がエルゴード的であることを証明した（論文執筆済）。そこで提案した 2 次元写像は非可逆写像であるが、それに 1 次元追加することによって 3 次元の可逆写像にすることによって不安定次元 1 と 2 の周期点集合がそれぞれアトラクタで稠密であることを証明した。また、いくつかの低次元写像や Edward Lorenz によって 1996 年に提案された高次元常微分方程式について数値計算を行い、それらがヘテロカオスである数値的証拠を得て、異なる不安定次元をもつ構造が混ざるメカニズムを明らかにした。また、それらの例を用いてヘテロカオスの発生メカニズム（分岐）を考察した（論文出版済）。いくつかのヘテロカオス写像において、ある不安定次元  $n$  をもつ点で構成されている最大の不変集合として index- $n$  set を定義し、その集合を数値的に求めて、各写像における不安定次元の異なる構造の混ざり方を考察した。

ii. リザーバーコンピューティングと呼ばれるリカーレントニューラルネットワークを用いた機械学習を、流体力学に関するマクロ時系列データに適用して、時間発展モデルを構築した。そのモデルは初期条件を与えるとしばらくの間、真の時間発展を良く近似する軌道を生成するとともに、時間発展の近似が破綻した以降のモデル軌道も真の統計性質を再現するものとなっている（論文出版済）。また、時系列として観測可能な変数が少ない場合に時間遅れ座標を用いて学習することが有効であることを示し、時間遅れ座標の遅れ時間ならびに次元の適切な取り方を提案した（論文採録決定済）。取るべき遅れ時間  $\tau$  は用いる変数の相関時間程度（自己相関関数を時間差  $t$  の関数と見たときに、はじめて 0.3 程度になる  $t$ ）、ならびに次元  $M$  は自己相関関数の包絡線が 0.3 程度になる  $t$  を  $T$  としたときに  $M \cong T / \tau$  と見積もるべきであると提案した。

iii. 準周期軌道上パーコフ平均の計算は軌道長  $N$  に対して素朴に計算した場合の収束オーダーは  $1/N$  である。これまでの先行研究で  $1/N^{10}$  程度の高速化が図られていた。今回の手法では準周期軌道の回転数がディオファンタイン条件を満たす場合には、理論的には  $1/[N$  に関する任意の多項式] より早い収束が得られ、実際の計算においても 4 倍精度計算で  $1/N^{20} \sim 1/N^{30}$  程度の収束オーダーが得られることが明らかとなった。また、ディオファンタイン条件を満たす場合でもその瀬戸際にあるときに、どの程度実用的な観点で計算高速化に影響があるかについても明らかにした。この手法の応用として複素力学系のジージェル板やジージェル球の特徴づけを行ったり（論文出版済）、低次元に射影された準周期軌道の回転数を求めるために時間遅れ埋め込みを用いる手法を提案した（論文出版済）。また、ある 2 次元 skew-product 型力学系の間欠性の発生にサドル-リペラー分岐による周期点の消滅にともな

って準周期軌道がパラメタ空間で大量に生まれることを準周期軌道上のバーコフ平均の高速計算に基づいて明らかにした。

iv. 購買力平価説に基づいて調整をおこなった複数为替時系列間(米ドル、日本円、ユーロ)にみられる同期レベルの時間的变化を明らかにするために、数年タイムスケールのバンドパスフィルターをかけた時系列に対してヒルベルト変換を適用して複素化し、各時刻の位相を同定して時々刻々の同期指標を計算した。米ドルー日本円や米ドルーユーロ間の同期レベルの変動を抜き出し、時々刻々の通貨が先行、遅行しているかについての情報を得ることにも成功した。また、都道府県別鉱工業生産指数(月次)に対して時系列間の同期レベルの変遷を為替時系列と同様の手法で計測し、政府の公表する景気指数と突き合わせることによって景気上昇局面においては同期レベルが比較的低く、景気下降局面においては同期レベルが比較的高いという知見を得た。

### 3. 今後の展開

経済政策、金融政策を決定する際に、同期・非同期状態の遷移ならびにその背後にある力学系的構造を意識することにより、現在より政策の有効性を高めることができるようになると思われる。5-10年のスパンでそれが実現されるように進めていきたい。そのためには、現在より踏み込んだ形の同期・非同期状態間遷移の理解ならびにそれに基づく制御方法の提案が必要になる。財務省、IMF、世界銀行などの実務家とパイプが出来たので、ある程度理論的に道筋が出来た段階で実行可能性を探るために実務家とも議論を深めていきたい。

### 4. 自己評価

#### ・研究目的の達成状況

研究開始時に想定していた研究目標(流体や経済などを同期・非同期状態間遷移の観点でみるために必要な知見)が概ね達成できた。非公開の研究成果に記載した内容に関する執筆中の論文が発表出来ると当初の研究目的がほぼ完全に達成できたことになる。また、さががけ研究を通して得た知見により、当初計画していなかったリザーバーコンピューティングによる流体研究もおこなうことが出来た。

研究の進め方(研究実施体制及び研究費執行状況)：

#### i. ヘテロカオスの研究

##### ・数値的研究：

[研究実施体制]James A. Yorke 教授(メリーランド大学)、Miguel A. F. Sanjuan 教授(Rey Juan Carlos 大学)、小林幹准教授(立正大学)

[研究費執行状況]メリーランド大学出張滞在旅費

##### ・理論的研究：

[研究実施体制]James A. Yorke 教授(メリーランド大学)、高橋博樹准教授(慶應義塾大学)

[研究費執行状況]メリーランド大学出張滞在旅費

#### ii. 流体乱流のリザーバーコンピューティング

[研究実施体制]中井拳吾氏(東京大学数理科学研究科博士課程)

[研究費執行状況]京都大学大型計算機借用料、講演出張旅費、計算機サーバー購入

iii. 準周期軌道とヘテロカオスにおけるその役割

[研究実施体制] James A. Yorke 教授(メリーランド大学)、Evelyn Sander 教授(George Mason 大学)、Suddhasattwa Das 博士(Courant 研究所)

[研究費執行状況]メリーランド大学出張滞在旅費

iv. 複数経済時系列間の同期解析

[研究実施体制] 武藤誠氏(一橋大学経営管理研究科博士課程)(さきがけ RA)

[研究費執行状況] 研究補助者への謝金(武藤氏)、計算機サーバー購入

研究成果の科学技術及び社会・経済への波及効果(今後の見込みを含む)

流体力学や経済・金融などの複雑現象の理解、制御等に本研究で得た方向性の知見が今後 10 年程度スパンで活用しうると期待している。

## 5. 主な研究成果リスト

### (1)論文(原著論文)発表

- |   |
|---|
| 1.K. Nakai and Y. Saiki, Machine-learning construction of a model for a macroscopic fluid variable using the delay-coordinate of a scalar observable, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S, Online first, 2020. |
| 2.S. Das, Y. Saiki, E. Sander and J. A. Yorke, Solving the Babylonian Problem of quasiperiodic rotation rates, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S 12 (8), 2279-2305, 2019.                                    |
| 3. Y. Saiki, M. F. Sanjuán and J. A. Yorke, Low-dimensional paradigms for high-dimensional hetero-chaos, Chaos 28, 103110:1-7, 2018   |
| 4. K. Nakai and Y. Saiki, Machine-learning inference of fluid variables from data using reservoir computing, Physical Review E 98 (2), 023111:1-6, 2018   |
| 5. S. Das, Y. Saiki, E. Sander and J. A. Yorke, Quantitative Quasiperiodicity, Nonlinearity 30 (11), 4111-4140, 2017  |

### (2)特許出願

研究期間累積件数:0 件(公開前の出願件名については件数のみ記載)

### (3)その他の成果(主要な学会発表、受賞、著作物、プレスリリース等)

1. Machine-learning prediction of fluid variables from data using reservoir computations, Math colloquium, Howard University, 2018 年 4 月 6 日
2. Machine-learning construction of a model for a macroscopic fluid variable using the delay-coordinate of a scalar observable, Applied and Computational Math Seminar, George Mason University, 2019 年 2 月 1 日
3. 機械学習に基づいた流体マクロ変数に関する数理モデル構築ならびに時間発展予測, 理論応用力学講演会, AIMaP 数学応用セッション OS08(流体力学の新手法と流れの深層:

計算科学・機械学習・力学系・トポロジー), 北海道大学, 2019 年 6 月 30 日

4. 流体マクロ変数に関する数理モデルの機械学習に基づく構築, Prometech Simulation Conference, ベルサール東京日本橋, 2019 年 12 月 6 日
5. ヘテロカオス, MIMS 現象数理学拠点 2019 年度共同研究集会「Advancing Interaction among mathematical concepts and methods towards practical problems 2019」, 明治大学, 2019 年 12 月 7 日