研 究 報 告 書

「一般化スペクトル理論に基づいたネットワーク上の大自由度力学系の同期現象の解明」

研究タイプ：通常型
研究期間： 2016 年 10 月～2020 年 3 月
研 究 者： 千葉 逸人

1．研究のねらい

電力ネットワークや，多数の素子のなす回路，脳神経細胞のつながりを表すネットワークなど，大規模・大自由度のネットワーク構造は身の回りに溢れている．また，脳神経細胞ネットワークや心筋細胞において起こる同期現象のように，大規模なネットワーク構造が創り出すダイナミクスが生命体の活動において本質的である現象も多い．例えば脳神経細胞ネットワークにおいては，個々の細胞の発火リズムが同期することで観測可能な脳波が生じ，我々の生活のリズムと直接関係すると考えられるが，脳神経細胞のネットワーク構造はいまだ解明されていない．

近年，実験技術の進歩によりそのような複雑な系に対して詳細なデータが取れるようになってきたことで，数学を用いたアプローチが可能になりつつある．そのため，大規模ネットワーク上の力学系の研究とその応用，特に同期現象の研究は今後ますます重要になるであろう．

本研究の目標は，大規模ネットワーク上の力学系のダイナミクスの研究である．特に同期現象を解明するための新しい数学理論の構築，およびその様々な社会的問題への応用である．応用上も数学の観点からも重要かつ挑戦的な問題は，「与えられたネットワーク構造がダイナミクスに与える影響を理解する」ことである．このような問題は非常に豊かな数学的構造を内包していると考えられ，問題の背後に潜むその本質を見出すことは応用上も純粋数学そのものの発展にも大きく寄与するだろう．

本研究者の先行研究により，自身が構築した数学理論である一般化スペクトル理論が大規模力学系の同期現象の研究に有効であることが分かっている．一般化スペクトルとは固有値の一般化概念であり，固有値だけでは解明できない大自由度・無限自由度の問題を扱うのに適している．そこで，一般化スペクトル理論を軸とした同期現象の新しい解析手法の開発，およびその様々な社会的問題への応用を遂行することが本研究のねらいである．

2．研究成果

（1）概要

本研究の成果の概要を理論と応用の2つに分けて説明する．

（a）理論的な成果

本研究の目的の1つは，ネットワーク上の大規模力学系のダイナミクスの解析手法を構築することである．そのために，同期現象の数理モデルとしてよく用いられる蔵本モデルをネットワーク上に一般化した次のモデルを提案した．

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\sin(\theta_j - \theta_i).$$

ここで θ_i は円周上を運動する振動子の位相，ω_i は自然振動数，N は考えている振動子の数，K は結合強度，a_{ij} は i 番目の振動子と j 番目の振動子が相互作用していれば値 1 をとり，そうでなければ 0 とする．すなわち a_{ij} はネットワーク構造を決めており，隣接行列と呼ばれる．本研究の成果として，ネットワーク構造と蔵本モデルのダイナミクスの関係を数学的に明らかにし，さらに一般化スペクトル理論を用いることで，上記モデルの結合強度 K がある値を超えると同期現象が起こることを証明した．詳細は次項，あるいは研究成果リスト（以下の項目５）の論文 2, 3, 4 を参照のこと．

（b） 応用上の成果

項目(a)で得られた理論をランダムグラフ，スモールワールド，スケールフリーなど自然界によく観られる様々なネットワーク上の蔵本モデルに適用し，同期現象の起こりやすさや同期のタイプの違いを調べた（論文 4）．

さらに脳神経細胞の同期発火のモデルに同理論を適用することで，ネットワークの複雑さと同期発火の起きやすさの関係を明らかにした．この研究により，ネットワークが複雑すぎると情報が混線して安定した脳波が生じ得ないことが初めて数学的に明らかにされた．同様の理論を電力ネットワークの数理モデルに適用し，電線で繋がれた発電所間の電流の位相が同期するための公式を導出した．

２）詳細

（a） 理論的な成果

結合強度 K を大きくしていくとある値で相転移が起きて同期が起こることを示すのが目的である．本研究においては振動子の数が十分大きいときの極限に興味があるため，まず上記の蔵本モデルの連続極限（流体力学極限）を導出した．これにより，隣接行列 a_{ij}はグラフ関数と呼ばれるある2変数関数 $W(x,y)$ に収束する．この $W(x,y)$ を積分核に持つフレドホルムの積分作用素の最大固有値を μ とするとき，相転移が起こる結合強度は次の公式

$$K = \frac{1}{\mu}\frac{2}{\pi g(0)}$$

で与えられることを証明した．ここで関数 g は自然振動数 ω_i の分布関数である．この公式を通して，ネットワーク構造を規定する積分作用素の最大固有値 μ が同期の起きやすさに直接関係することが明らかになった．さらに一般化スペクトル理論を用いて K がこの値を超えると生じる同期解の形状を求めた．その結果，最大固有値 μ の固有関数が同期解の形状にかかわることが分かった．ネットワーク構造の連続極限として得られるフレドホルムの積分作用素の固有値・固有関数が同期が起こる相転移点と同期解

の形状を決定する，という意味において，当初の目標であった「与えられたネットワーク構造がダイナミクスに与える影響を理解すること」は十分に達成された.

（b）応用上の成果

論文4では，上記で得られた相転移点の公式をランダムグラフ，スモールワールド，スケールフリーに適用した. ネットワークの辺の数は順に少なくなっていくが，驚くべきことにスケールフリーの場合がもっとも μ が大きく，すなわち小さい K でも同期が起きることが明らかになった. スケールフリーとは，多数の辺とつながりがある頂点（ハブ）が少しだけあり，その他の大多数の頂点はあまり他とつながっていないという特徴を持つ. 空港間のネットワークや SNS での人のつながりなど，多くの例が知られており，今回の結果の社会問題への応用が期待される.

また，一般化スペクトル理論を用いた解析手法を，脳神経細胞のネットワークの同期発火の問題に適用した. 方程式は蔵本モデルよりもずっと複雑なので省略するが，脳神経細胞たちがシナプスによりあるネットワークで繋がっており，1つの細胞が発火すると，それと繋がっている細胞に化学物質が送られその発火を促す，というモデルである. 1000 個程度の神経細胞が同期発火すると脳波が観測されるが，今回は記憶や認知に関わるガンマ波をターゲットにしている. このモデルに対して我々の理論を適用したところ，以下のことが分かった. シナプスの数が少ないときは同期しないが，徐々に大きくしていくとあるところで相転移が起きてガンマ波が生じる. しかしさらに大きくしていくと再び相転移が起きてガンマ波は生じなくなる. つまり，ガンマ波はシナプスの数が適度でないと生じない. 実際，乳児期に脳が急速に発達する過程でシナプスの数も急速に増えるが，成長と共に不要なものはなくなっていく“刈り込み”という現象が知られている. 今回の結果はこのような現象を数学的に説明するための研究の先駆けとなりうる. この研究は東京大学の小谷潔氏との共同研究である.

別の応用例として，我々の理論を発電所間のつながりを表す電力ネットワークの数理モデルに適用し，電流の周波数が同期するための条件を求めた. ここでの数理モデルは次で与えられる，蔵本モデルの2階微分版である：

$$\frac{d^2\theta_i}{dt^2} + \gamma\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\sin(\theta_j - \theta_i)$$

このモデルに対し，蔵本モデルと同様に同期がおこる相転移点 K を求めた.

以上のように，我々が構築したネットワーク上の力学系の同期を解析するための数学理論は多方面に応用可能であり，「様々な社会的な問題に応用する」という当初の目的はおおむね達成された.

3．　今後の展開

数学全般に言えることであるが，一般化スペクトル理論の特徴は普遍的かつ抽象的な理論であるから問題の対象を選ばず広範囲な応用が考えられ，波及効果が大きいことが利点である. 今後も様々な問題に適用することで，この研究で得られた成果の社会への普及に努めたい. 一方で，実用化まで視野にいれる場合はさらに突き詰めるべき問題もある. 例えば項目2で述

べた脳神経細胞の同期の問題では細胞の数が 1000 個程度の局在化した領域しか対象としていなかった. 脳の情報伝達・統合が大域的なレベルでどのようなメカニズムで起きているかは, 理論的にも実験的にも極めて難しい問題である. 今後は医学や生物系の研究者と連携し, このような問題に数学的な視点から貢献していきたい.

4. 自己評価

当初の研究計画は, 前半において同期現象を解析するための数学理論の構築(項目2の(a)), 後半はその様々な社会的問題への応用(項目2の(b))であったが, どちらも十分に達成された. 研究の進捗, 実施体制, 研究費執行についてもおおむね研究計画通りである.

社会的な問題に対して数学的な視点からアプローチするだけではなく, 問題解決を通して数学自体の発展にも寄与できたという点においては, 本領域の戦略目標に沿った研究ができた. また, 今回の研究を通して異分野の研究者との共同研究が生まれ, 数学そのものの普及や研究者間のつながりにも貢献できたと思う.

今回得られた数学理論はその抽象性・普遍性のため適用範囲が広く, 今後の社会への波及効果は十分に大きい. 実際の現象を予測・説明するためには実験データとの比較が必要であり, それは今後の課題ではあるが, 脳科学のように人間での実験が容易にできない問題に対しては, 今回得られたような数学的なアプローチがますます重要になってくると期待される.

5. 主な研究成果リスト

(1)論文(原著論文)発表

1. H. Chiba, A center manifold reduction of the Kuramoto-Daido model with a phase-lag, **SIAM j. on Appl. Dyn. Syst.** (2017) Vol.16, No.3, 1235-1259.
2. H.Chiba, G. S. Medvedev, The mean field analysis for the Kuramoto model on graphs I. The mean field equation and transition point formulas, **Discret. Contin. Dyn. S.-A**, (2019) 39(1), 131-155.
3. H.Chiba, G. S. Medvedev, The mean field analysis ofthe Kuramoto model on graphs II. Asymptotic stability of the incoherentstate, center manifold reduction, and bifurcations, **Discret. Contin. Dyn. S.-A**, (2019) 39 (7), 3897-3921.
4. H.Chiba, G. S. Medvedev, M. S. Muzuhara, Bifurcations in the Kuramoto model on graphs, **Chaos**, (2018) 28, 073109.

(2)特許出願

研究期間累積件数:0 件(公開前の出願件名については件数のみ記載)

(3)その他の成果(主要な学会発表、受賞、著作物、プレスリリース等)

1. 2017 年 10 月 14 日, 中国応用数理学会年会, 青島, 中国にて招待講演.「The Kuramoto Model on Networks」
2. 2019 年 7 月 10 日, Equadiff 2019, ライデン, オランダにて招待講演.「Dynamics of Neuronal oscillations on a Random Graph」
3. 2019 年 9 月 17 日, The international conference Dynamics, Equations and Applications,

ポーランドにて招待講演.「Bifurcation of the Kuramoto Model on Networks」

4. 2019 年 12 月 7 日, 台湾数学会年会, 台湾にて招待講演.「A Bifurcation of the Kuramoto Model on Networks」