

# 研究報告書

## 「縮小するネットワークにおけるアルゴリズム理論の整備」

研究期間：平成29年10月～平成31年3月  
研究者番号：50140  
研究者：小林 佑輔

### 1. 研究のねらい

本研究では、ネットワーク上の最適化問題に対するアルゴリズム理論の研究を行う。アルゴリズムの理論研究においては様々な種類の問題が扱われているが、中でも「実際に起こりうる諸問題を単純化・抽象化して得られる問題」が注目され、盛んに研究されてきた。例えば、最短路問題のように、ネットワークの中で良いものを見つける形式の問題や、連結度増大問題のように、ネットワークを拡大することでより良いネットワークを構築する問題が例として挙げられる。

近年では、我が国における交通ネットワークのように、現在のネットワークを維持することが困難であり、縮小する必要のあるネットワークが現れつつある。しかし、これまでは縮小するネットワークが「現実のネットワークの単純化・抽象化」として明確に認識されていなかったこともあり、このようなネットワークを対象とするアルゴリズム理論の研究はほとんど行われてこなかった。

そこで本研究では、縮小するネットワークを対象とし、「良いネットワーク」を適切に数理的にモデル化すること、そして「良いネットワーク」を構築するアルゴリズム理論を整備することを目的とする。縮小するネットワークを対象としたアルゴリズムの理論研究を発展させ、将来的に、アルゴリズム理論の非専門家が様々なアルゴリズムを道具として利用しやすくすることを目指す。

### 2. 研究成果

#### (1) 概要

本研究では、縮小するネットワークを対象としたネットワーク最適化問題を定式化し、その問題に対する理論的保証のあるアルゴリズムの設計を行なった。具体的には、元のネットワークに比べて2点間の距離がそれほど長くないという制約の下で辺(リンク)をできる限り多く間引く問題を、最小スパナー問題として定式化した。特に、本研究で扱うネットワークでは取り除く辺(リンク)数が少ないことを想定して、取り除く辺数をパラメータとした効率の良いアルゴリズム(固定パラメータアルゴリズム)を設計する問題を、パラメータ化最小スパナー問題として導入した。

本研究の主要な成果は、パラメータ化最小スパナー問題に対して、初めての固定パラメータアルゴリズムを与えたことであり、その結果は論文(1)-1、論文(1)-3にまとめられている。特に、今まで数学的に扱いにくくほとんど成果の知られていなかった加法的スパナーに対する結果は理論的に重要な貢献であるといえる(論文(1)-1)。また、本問題を扱う

中で、長らく未解決であった平面グラフ上の(パラメータ化でない)最小スパナー問題の NP 困難性を初めて示している(論文(1)-3)。

本研究課題のパラメータ化最小スパナー問題に関する成果以外にも、取り除く辺数をパラメータにする問題が J. Bang-Jensen et al. (2018) で扱われており、今後取り除く辺の数をパラメータにする問題が注目を集め、研究が盛んに行われることが期待される。

## (2) 詳細

### 課題1. ネットワークのモデル化

本研究の第一の課題は、縮小するネットワークを対象とし、ネットワークの良さを適切に数理的にモデル化することである。通常のネットワークと同様に「連結度」や「中心性」、「距離」といった評価指標を基本とすることを考え、その際に縮小するネットワークにおいては、得られたネットワークが現在のネットワークと比べてどのくらい悪くなっているのかの差分を考慮する必要がある点に留意した。その結果、縮小するネットワークにおける基本的な問題として、パラメータ化最小スパナー問題とパラメータ化最小  $k$  連結部分グラフ問題の2種類を導入した。

スパナーとは元のグラフ(ネットワーク)の部分グラフであり、元のグラフにおける距離に比べてスパナー上での距離がそれほど長くないものをいう。スパナーは大規模なネットワークにおけるアルゴリズム設計の前処理として盛んに研究されてきた。スパナーの概念は、「辺を間引いた結果元のネットワークと比べて距離がそこまで長くない」とも解釈できるため、縮小するネットワークの視点でも重要だと考えられる。最小スパナー問題とは、距離がそこまで長くないという制約の下で辺(リンク)をできる限り多く間引く問題である。また、最小  $k$  連結部分グラフ問題とは、 $k$  連結性というネットワークの頑健性の制約の下でできる限り多くの辺(リンク)を間引く問題である。

最小スパナー問題や最小  $k$  連結部分グラフ問題自体は、与えられたネットワークの一部(部分グラフ)を取り出して、ある程度良いネットワークを得るというタイプの問題として既に考案されていた問題である。しかし、既存研究では、与えられたネットワークからリンクの大部分を取り除き、非常に小さな一部分のネットワークを取り出して、ある程度良いネットワークを得ることを目指していた。一方、本研究で扱うネットワークでは、元のネットワークから取り除くリンクはそれほど膨大にはならない状況を考えている。そのため、取り除くリンク数が少ないことを想定して、そのリンク数をパラメータとした効率の良いアルゴリズム(固定パラメータアルゴリズム)を設計する問題を導入した。なお、このパラメータは自然なパラメータであるにも関わらず、今までに注目されておらず、問題の導入自体が重要な貢献であると考えられる。実際、論文(1)-3の査読者にはこのパラメータの導入は高く評価された。

### 課題2. 最適化問題に対するアルゴリズムの設計

本研究の主要な成果は、パラメータ化最小スパナー問題に対して、初めての固定パラメータアルゴリズムを与えたことであり、その結果は論文(1)-1, 論文(1)-3 にまとめられてい

る。また、本問題を扱う中で、長らく未解決であった平面グラフ上の(パラメータ化でない)最小スパナー問題の NP 困難性を初めて示した(論文(1)-3)。固定パラメータアルゴリズムとは、取り除く辺の数  $t$  をパラメータとしたときに、計算時間が、(グラフのサイズの多項式)  $\times$  ( $t$  の関数) で抑えられるアルゴリズムのことをいう。取り除く辺の数  $t$  が指数部分に表れないため、 $t$  が小さいときには比較的計算時間が小さなアルゴリズムになる。

本研究では、まず乗法的なスパナーを扱った。この問題は、指定された  $t$  に対して、どの 2 点間の距離も元の距離の高々  $t$  倍にしかならない、という制約の下でできる限り多くの辺を取り除く問題である。論文(1)-3 の中で、乗法的なスパナーはグラフの局所的な性質だけから特徴づけられる、すなわち比較的数学的に扱いやすい対象であることを明らかにした。そして、この性質に基づいて、乗法的なパラメータ化最小スパナー問題に対する初めての固定パラメータアルゴリズムを与えた。

乗法的スパナーの結果を受けて、次に自然な対象として加法的スパナーを扱った。この問題は、指定された  $t$  に対して、どの 2 点間の距離も元の距離より  $t$  しか長くならない、という制約の下でできる限り多くの辺を取り除く問題である。一見すると、乗法的スパナーと加法的スパナーの間には大きな差異はないように見えるものの、実際にはこれらの扱いやすさは全く異なるものである。上で述べたように、乗法的スパナーはグラフの局所的な性質で特徴づけられるのに対して、加法的スパナーを扱うにはグラフの大域的な性質を扱う必要がある。そのため、加法的スパナーは数学的に非常に扱いづらい対象であり、これまでに加法的スパナーに関する成果は(我々の問題設定以外の問題に対しても)ほとんど知られていなかった。本研究では、論文(1)-1 の中で、加法的なスパナーの大域的な性質を今回の問題特有の条件を使いつつ扱うことで、加法的なパラメータ化最小スパナー問題に対する初めての固定パラメータアルゴリズムを与えた。結果もさることながら、加法的スパナーを扱う証明手法自体が今までにない特徴的なものであるといえる。

以上のように、本研究の主成果は、パラメータ化最小スパナー問題に対して、初めての固定パラメータアルゴリズムを与えたことである。特に、今まで数学的に扱いにくくほとんど成果の知られていなかった加法的スパナーに対する結果は理論的に重要な貢献であるといえる。

なお、パラメータ化最小  $k$  連結部分グラフ問題については、本研究期間中に、我々の研究とは無関係に J. Bang-Jensen et al. (2018) により、多くのバリエーションに対して、固定パラメータアルゴリズムが提案された。結果的には、パラメータ化最小  $k$  連結部分グラフ問題は本研究での成果とはならなかったものの、世界的に見て同じような問題設定の重要性が認識されつつあることを表していると考えられる。本研究課題のパラメータ化最小スパナー問題に関する成果と、J. Bang-Jensen et al. (2018)らの成果を皮切りに、今後取り除く辺の数をパラメータにする問題が注目を集め、研究が盛んに行われることが期待される。

また、本研究では最小スパナー問題以外のネットワーク上の最適化問題についても成果を挙げており、そのうちいくつかは論文として出版されている(論文(1)-2, (1)-4, (1)-5)。

### 3. 今後の展開

本研究課題のパラメータ化最小スパナー問題に関する成果以外にも、取り除く辺数を  $k$

ラメータにする問題が J. Bang-Jensen et al. (2018) で扱われており, 取り除く辺の数をパラメータにする問題が徐々に注目を集めつつある. 今後は, 距離, 連結度以外の条件を考慮した最適化問題に対して, 同様のパラメータを導入した問題が重要になってくると考えられる. 現時点では, 理論的な意味での効率性のみ注目しており, 計算速度の意味でも扱える問題の広さの意味でも実用的なアルゴリズムではない. しかし, 今後様々な問題設定に対するアルゴリズム理論を整備することで, 他の最適化問題のアルゴリズム理論と同様に, 将来のアルゴリズム設計の基盤となることが期待される.

#### 4. 自己評価

パラメータ化最小スパナー問題に対する初めての固定パラメータアルゴリズムを与えたことや, 平面グラフ上の最小スパナー問題の NP 困難性を初めて示したことは, 個々の成果として重要な貢献であると評価できると思われる. その一方で, 縮小するネットワークに関する最適化問題の枠組みを作るという段階には至っておらず, 今後このトピックに関する成果を積み重ねることで枠組みを構築していく必要があると考えられる. 研究の進め方については, 本研究は理論研究であり, 研究補助者等を必要としない体制や, 研究費の大半を研究打合せ・情報収集のための旅費に使用した点は妥当であると考えられる. 研究成果の波及効果は, 現時点で明確ではなく, 同様の最適化問題の後続研究がどれくらい盛んに行われるかに大きく依存すると考える.

#### 5. 主な研究成果リスト

##### (1) 論文(原著論文)発表

- |   |
|---|
| 1. Yusuke Kobayashi: An FPT algorithm for minimum additive spanner problem, arXiv:1903.01047, 2019.   |
| 2. Yusuke Kobayashi and Ryo Sako: Two disjoint shortest paths problem with non-negative edge length, Operations Research Letters, 47 (2019), 66--69.  |
| 3. Yusuke Kobayashi: NP-hardness and fixed-parameter tractability of the minimum spanner problem, Theoretical Computer Science, 746 (2018), 88--97.   |
| 4. Koki Takayama and Yusuke Kobayashi: A strongly polynomial time algorithm for the maximum supply rate problem on trees, Proceedings of the 12th International Frontiers of Algorithmics Workshop (FAW 2018), pp. 54--67.                |
| 5. Takehiro Ito, Naoyuki Kamiyama, Yusuke Kobayashi, and Yoshio Okamoto: Algorithms for gerrymandering over graphs, Proceedings of the 18th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS 2019), to appear. |

##### (2) 特許出願

無し

##### (2) その他の成果(主要な学会発表、受賞、著作物、プレスリリース等)

無し