公開

（事後評価・研究者用）

研　究　報　告　書

「重みつき組合せ最適化と多項式行列理論のインタラクション」

研究期間：　2018 年 10 月～2020 年 3 月
研究者番号：　50169
研 究 者：　大城　泰平

1．　研究のねらい

組合せ最適化とは、複数の選択肢の中から最もよいものを探す問題の枠組みである。各選択肢を構成する要素が「重み」とよばれる実数値を持つ組合せ最適化問題は、特に「重みつき組合せ最適化問題」とよばれる。典型的には、各要素の重みは価値やコストなどを表現しており、その合計値が最大または最小となる選択肢の発見が重みつき組合せ最適化問題の命題である。一方、各要素が均一（同じ重みを持つ）である場合、その問題は「重みなし組合せ最適化問題」とよばれ、選択肢を構成する要素の数の最大化を目指すのが目標となる。

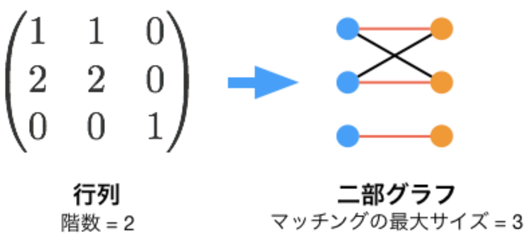
一部の重みなし組合せ最適化問題は、数学の一分野「線形代数」における「行列」の理論を経由して効率的に解くことができる。また逆にある種の行列の問題を、組合せ最適化の道具立てを用いて解く手法も知られている。これらの「組合せ最適化問題」と「行列の問題」の対応は、理論計算機科学や数理工学等の分野において探求が続けられており、理論的に興味深いだけでなく、実問題への広い応用ももつ。

本研究では、重みなし組合せ最適化問題を重みつき組合せ最適化問題に、行列を各要素が多項式である「多項式行列」にそれぞれ拡張し、「重みつき組合せ最適化問題」と「多項式行列の問題」の対応に迫る。具体的な二つの問題を通して、重みなし問題と重みつき問題の間に存在する理論のギャップを埋め、ある種の組合せ最適化問題において多項式行列が果たす役割を明確にし、また逆に、多項式行列理論における組合せ最適化アルゴリズムの活用手法の創出を目指す。

2．　研究成果

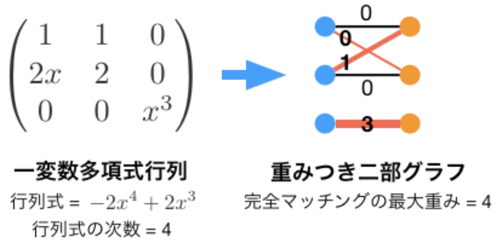
（1）概要

選択肢の中から一番よいものを探す「組合せ最適化」理論と、高次元の真っ直ぐな空間を扱う「線形代数学」の間に関係があるということは、古くから知られてきた。例えば、行列の階数は、その行列から作られる二部グラフがもつマッチングの最大サイズで上から抑えられる（右図）。また、1847 年に Kirchhoff が示した行列木定理は、グラフの中に存在する全域木の個数を、行列式を用いて数え上げる非常に美しい定理である。Whitney (1935)は、グラフにおいて全域木がもつ性質と、行列の列ベクトル集合がもつ線形独立性を共通して抽象化し、マトロイドの概念を提案した。今日では、マトロイドは組合せ最適化における基本的な考察対象の一つであり、回路解析、剛性理論、ネットワーク符号化など、工学における幅

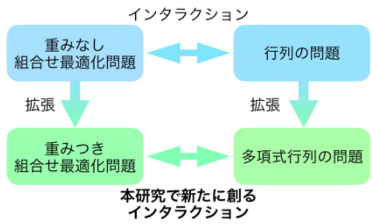


広い応用をもつ。

「重みのついていない最適化問題」を「重みがついている最適化問題」へ拡張すると、対応する線形代数の問題の多くは多項式行列（各要素が多項式である行列）上の問題に拡張される。例えば、一変数多項式行列の行列式の次数は、重みつき二部グラフの完全マッチングの最大重みで上から抑えられる（上図）。しかしながら、「重みなし組合せ最適化問題」と「行列の問題」の対応に比べ、「重みつき組合せ最適化問題」と「多項式行列の問題」の対応に着目した研究は少なく、理解が進んでいるとは言い難い。



本研究では、具体的な2つの問題を通して、重みなし問題と重みあり問題の間に存在する理論のギャップを埋め、「重みつき組合せ最適化問題」と「多項式行列の問題」の対応に迫った。具体的には、



- 「重みつき組合せ最適化問題」を「多項式行列」を用いて解く試みとして「重みつき行列木定理」
- 「多項式行列の問題」を「重みつき組合せ最適化」の理論を応用することで解く試みとして「多項式行列の行列式の次数計算」

に取り組んだ。

（2）詳細

研究テーマ A「重みつき行列木定理」

Kirchhoff の行列木定理は「グラフの中に存在する全域木を数える」という組合せ最適化問題（選択肢の数え上げ問題）を「行列の行列式を計算する」という線形代数の問題に落とし込む、古典的だが非常に美しく、かつ実用的な定理の一つである。行列木定理の数学的本質は行列式を展開した際の符号の整合性にあり、そのような性質は全域木の他にもある種の二部グラフにおけるマッチングで成立することが Webb (2004)の博士論文により指摘されている。また、有向全域木や Euler 路の数え上げなどの問題においても同様の性質が背後に存在することが陽または暗に知られていた。Webb によって「パフィアンペア」と名付けられたこれらの離散構造は、「線形マトロイド交叉」とよばれる問題の特殊例である。

グラフの各枝が重みを持っている重みつきの問題設定においては、Kirchhoff の行列木定理は、多項式行列を用いて自然に拡張される。すなわち、最小重みの全域木を数え上げる問題は、「行列」「多項式」という道具立てを用いて代数的に定式化される。しかしながら、この代数的定式化は、重みつき数え上げ問題に対する効率的なアルゴリズムをただちに与えるものではない。全域木や有向全域木に対しては、効率的な重みつき数え上げアルゴリズムがそれぞれ Broder-Mayr (1994)および Hayashi-Iwata (2017)によって与えられたものの、これらは全域木や有向全域木に特化したアルゴリズムであり、一般のパフィアンペアに適用可能である行列木定理の汎用性を失っている。

本研究テーマの成果は、すべてのパフィアンペアに適用可能な効率的重みつき数え上げ

アルゴリズムの構築である。数学的には、Frank の重み分割とよばれる、重み付きマトロイド交叉の双対理論を利用した多項式行列の変形手法が肝となった。本研究成果は京都大学で開催された「LA シンポジウム」にて報告し、国際賞である LA/EATCS-Japan 学生発表論文賞を受賞した（下記発表 5. および受賞 2.）。

研究テーマ B「多項式行列の行列式の次数計算」

行列の階数は標準的な掃き出し法によって計算することができるが、組合せ最適化の観点からは、行列の階数計算は二部グラフの最大マッチングの計算に対応する。一方、前述のように、重みつき二部グラフの最大重み完全マッチングの計算に対応するのは多項式行列の行列式の次数計算である。多項式行列に対して素朴な掃き出し法を適用すると各要素の次数が大きくなってしまうため、効率的な計算には工夫が必要となる。

本研究テーマにおいて、通常の多項式を一般化した「歪多項式」とよばれる種類の多項式を要素に持つ行列の行列式の次数計算を行う効率的なアルゴリズムを設計した。歪多項式は係数と変数が一般に可換でない多項式であり、制御工学や信号処理の工学分野において、線形時変システムの数学表現として自然に現れる。ここでシステムとは、外部からの入力（力や電圧など）に対し出力(位置や電流など)が変動する系（機械力学系や電気回路など）のことであり、特に出力が入力に対し線形の関係にあるシステムを「線形システム」、さらに出力が時刻に依存する場合は「線形時変システム」とよぶ。本研究で与えたアルゴリズムは、線形時変システムの自由度（システムの挙動を一意に定めるために設定しなければならない初期値の数）や安定性の解析に応用することができる。

また本研究は理論計算機科学の一分野「計算複雑性理論」における重要な未解決問題「多項式恒等性判定」（PIT）とも関わりをもつ。PIT の特殊ケースである Edmonds 問題は多変数多項式行列の階数を計算する問題であるが、効率的解法の存在は半世紀近く未解決である。近年、各変数が互いに非可換な Edmonds 問題（非可換 Edmonds 問題）に対する効率的解法が発表された（Ivanyous-Qiao-Subrahmanyam 2017 など）。本研究で提案したアルゴリズムは、非可換 Edmonds 問題を重みつきに拡張した問題に対する初の効率的解法を与える。このように、本研究は制御工学から理論計算機学まで様々な理論分野を横断する研究となった。

これらの成果は、ドイツ・ライプツィヒの Max Planck 研究所で行われた国際ワークショップ "Buildings, Varieties, and Applications"にて報告を行った（下記発表 2.）。現在、成果をまとめた論文を国際会議に投稿中である。インターネット上に公開したプレプリントに対し、海外の研究者から問い合わせの電子メールを頂くなど、一定の着目を集めていると考えている。

3. 今後の展開

本研究における両研究テーマの成果に対し、下記のような様々な学術的展開が考えられる。

研究テーマ A 本研究で与えた手法は、多項式行列を利用することで多くの重みつき数え上げ問題を統一的に扱うものである。しかしながら、本研究の枠組みで数え上げることのできない離散構造であり、かつ、効率的な数え上げアルゴリズムが知られるものも多い。本研究の成果を端緒とし、様々な後続研究が生まれ、統一的な枠組みで取り扱うことのできる離散構

造の世界が広がり、代数学を軸とした組合せ最適化分野のさらなる理論整備につながることが期待される。

研究テーマ B 本研究で与えた手法は、線形時変システムにおける自由度や安定性の解析に応用することができる。このようなシステムの組合せ的解析手法は、数値的摂動に強いという特長もあり、実際のシステム設計の現場でも広く用いられる。工学分野におけるさらなる展開として、解析手法から設計手法への発展が挙げられる。自由度の高いシステムの初期状態の決定や、安定性の高いシステムに変換するための方法論の構築など、組合せ最適化と代数学を武器に拓くことができる工学の世界はこの先にまだまだ広がっていると感じる。

4. 自己評価

- **研究目的の達成状況**
  1年6ヶ月という研究期間の中、期間中に査読付き国際会議や論文への採択まで至らなかったものの、研究テーマ B における歪多項式への拡張などは研究開始時点においてまったく考えていなかったものであり、当初の見通しを超える成果を出すことができたと考える。
- **研究の進め方（研究実施体制及び研究費執行状況）**
  本研究は個人型の理論研究であるため、実際の研究および論文執筆は代表研究者のみで実施した。研究費は主に書籍の購入および国内外の学会やワークショップに参加するための旅費として執行した。海外の研究者と共同研究のきっかけを作るなど、有効に活用することができたと考える。
- **研究成果の科学技術及び学術・産業・社会・文化への波及効果**
  「今後の展開」において前述したように、本研究成果は、情報学（研究テーマ A）や工学（研究テーマ B）において様々な学術的展開が考えられる。理論研究は、その成果が産業や社会へただちに還元されるような性質をもつものではないが、新たな価値を創造する種となるだろう。
- **研究課題の独創性・挑戦性**
  組合せ最適化と線形代数のつながりに着目する本研究の着眼点は、古典的ながら王道ではない、ある種「メジャーマイナー」的なものである。このつながりに着目し、さらに代数的・組合せ的観点から拡張を与える本研究の独創性および挑戦性は十分に認められるものであると考える。

5.　主な研究成果リスト

（1）論文（原著論文）発表

論文発表：0件

（2）特許出願

研究期間累積件数：0件

（3）その他の成果（主要な学会発表、受賞、著作物、プレスリリース等）

学会発表：6件

1. Taihei Oki. Computing the Maximum Degree of Minors in Polynomial Matrices over Skew Fields. The 11th Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications (HJ '19), Tokyo, Japan, May 2019.
2. Taihei Oki. Computing the Maximum Degree of Minors in Skew Polynomial Matrices. Buildings, Varieties, and Applications, Leipzig, Germany, Nov. 2019.
3. 大城泰平. Computing the Maximum Degree of Minors in Skew Polynomial Matrices. 2019 年度夏の LA シンポジウム, 愛知, 2019 年 8 月.
4. 大城泰平. Computing the Maximum Degree of Minors in Skew Polynomial Matrices. 日本数式処理学会 2019 年度理論分科会&システム分科会合同研究会, 福岡, 2019 年 10 月.
5. 大城泰平. パフィアンペアに対する一般化行列木定理. 2019 年度冬の LA シンポジウム, 京都, 2020 年 2 月.
6. 大城泰平. パフィアンペアに対する一般化行列木定理. 日本応用数理学会第 16 回研究部会連合発表会, 東京, 2020 年 3 月.

受賞：2件

1. LA/EATCS-Japan 学生発表論文賞, LA シンポジウム・EATCS 日本支部, 2020 年 2 月—上記 4. の発表に対して
2. 優秀発表賞, 日本オペレーションズ・リサーチ学会研究部会「最適化とその応用」：未来を担う若手研究者の集い 2019, 2019 年 6 月