研 究 終 了 報 告 書

「幾何的アプローチによる革新的なデータ解析の研究」

研究期間: 2019 年 10 月～2022 年 3 月
研 究 者: 池 祐一

1. 研究のねらい

位相的データ解析（Topological Data Analysis; TDA）はデータの大域的な形，すなわちトポロジーを抽出して解析に用いる比較的新しい手法であり，近年研究が進んでいる. TDA の主要な道具であるパーシステントホモロジーは，各データ点中心とする球の和集合を考えて球の半径を変化させたときのトポロジー変化を記録することで離散的なデータからトポロジーを取り出す. パーシステントホモロジーを用いることで従来捉えられなかった大域的なトポロジー的特徴量を用いることが可能になるのである.

ここで現在の TDA では実現できない次の二つの課題が存在する.

1) 実用上は半径パラメータ以外にも複数のパラメータを入れた多次元のパーシステンス構造を用いて，さらに多くの情報を抽出することが望ましい. しかし，多次元パラメータの場合はその情報を取り出す有効な手段がほとんどない.
2) TDA はトポロジーに着目するため，点群の曲がり方といった局所的な特徴を用いることができない.

本研究のねらいは上記二つの課題を解決して次の二つを実現することである.

i) 多次元パーシステンスに対して層理論的解釈を用いて新たな指標を構成する.
ii) 点群から曲率といった局所的な情報を取り出すアルゴリズムを構築する.

2. 研究成果

（1）概要

期間中の主要な研究テーマは上記「研究のねらい」の i), ii)に対応する二つからなる.

一つ目は「多次元パーシステンス加群への層理論的アプローチ」であり，このテーマについては大きく二つの成果を得た. まず１次元パーシステンス加群の族を２次元空間上の層とみなしたときに，その層のマイクロ台が族の両端の距離を統制することを示した. また，この評価をシンプレクティック幾何学のエネルギー評価の問題に応用した. これらの結果に関する論文（業績リスト(1)の 1）は期間中に執筆・投稿され採択に至っている. 次に zigzag パーシステンス加群と呼ばれる特殊な２次元のパーシステンス加群と実直線上の層の対応を具体的に記述し，その対応が各々の距離と整合的であることを示した.

二つ目は「曲率を捉える幾何的データ解析手法」である. このテーマについては局所主成分分析に基づくベースライン手法を開発し，数理的背景を調べるとともに実験を行い，結果を論文にまとめた. この手法は，点群データの各点について局所的に主成分分析を行って局所的な次元と接空間を推定し，その接空間上の二次関数を当てはめることにより曲率を推定する.

その他，ACT-X 研究を通じて主要な研究テーマとは別のテーマでの成果も得ている. ま

ず，空間拡張現実に関係するプロジェクタの配置問題に共同研究として取り組んだ．この研究では，星状領域への分解の考え方に基づき三次元内のメッシュをすべて照らせるプロジェクタの配置を決定するアルゴリズムを考案した．この結果に関する論文（業績リスト(1)の２）は国際会議のポスター発表に採択されている．

（２）詳細

研究テーマ1「多次元パーシステンス加群への層理論的アプローチ」

パーシステンス加群はパラメータを動かした際の構造変化を記述する代数的な道具であり，形式的にはベクトル空間とそれらの間の線形写像からなるパラメータ付けられた族として定義される．上記「研究のねらい」で述べたように，パラメータが複数の場合の多次元パーシステンス加群から情報を有効に取り出す手法は未発達である，近年，Curry や柏原・Schapira は層理論を用いて任意の次元のパーシステンス加群を調べるアプローチを提唱した．報告者は，このアプローチに基づきパーシステンス加群から層理論的に情報を取り出す研究に取り組み，以下の成果を得た．

まず浅野知紘氏と共同で，１次元パーシステンス加群の族に対応する2次元空間上の層について，その族の両端に現れるパーシステンス加群間のインターリービング距離の挙動について調べた．一般に層に対しては特異性をあらわすマイクロ台という余接束内の部分集合が定義される．我々は先の2次元空間上の層のマイクロ台の大きさで両端の加群間のインターリービング距離が上から統制できることを示し，それをシンプレクティック幾何学におけるエネルギー評価に応用した．この結果については論文（業績リスト(1)の１）にまとめて投稿し，論文誌に採択されるに至った．

次に平岡裕章氏・吉脇理雄氏と共同で，zigzag パーシステンス加群と呼ばれる応用上重要な2次元パーシステンス加群のクラスについて層理論的観点から調べた．Zigzag パーシステンス加群に関しては，現在箙表現の手法を用いての研究が進んでおり，Botnan・Lesnick はその手法を用いて zigzag パーシステンス加群間に距離を導入して代数的安定性を証明した．我々は zigzag な箙表現の圏と実直線上の整数点のファイバー上にマイクロ台を持つ層の圏との圏同値を証明し，この圏同値がそれぞれの圏上の距離と両立することを示した．これは箙表現と層理論という二つの理論をつなぐ結果である．論文は現在投稿中である．

本テーマの研究目的の達成状況について述べる．多次元パーシステンスの相関指標としては1次元の族として得られる2次元パーシステンス加群という特殊なクラスについては結果が得られたが，一般の指標の構成には至らなかった．しかしながら，1次元のパーシステンス加群を層とみなす際の利点について，層の導来圏におけるインターリービング距離の観点から大きく発展させられたと考えている．本アプローチのシンプレクティック幾何学への応用の有効性については十分満足のいく結果が得られた．実データ解析への適用については十分な研究が行えなかったため，引き続き研究を行う必要がある．

研究テーマ2「曲率を捉える幾何的データ解析手法」

TDA はデータのトポロジーを抽出するため，大域的な構造把握には適するものの点群の曲がり方といった局所的な情報を捉えられないという問題がある．本研究テーマの目的は，上記問題を解決するために点群から曲率的な情報を抽出する手法を開発することである．

当初は，マグニチュードホモロジーと粗幾何とのつながりを明らかにすることにより点群の

曲率にアプローチしようと考えていた．そこで擬等長写像によるマグニチュードホモロジーの振る舞いについて調べたが，リプシッツ定数の他に平行移動の寄与があることから期待したような結果は得られなかった．粗不変なマグニチュード的なホモロジーの構成にも取り組んだが適切な応用先が見つからないため，一度このアプローチは断念することとした．

上記のアプローチと並行して浅尾泰彦氏と共同でベースラインとなる曲率抽出手法の開発にも取り組んだ．我々のアイデアは多様体学習の考え方に近く，主成分分析を用いて接空間を推定し，その接空間に付随する二次関数を当てはめることで曲率を推定するものである．手法の概要は図1に示されており，具体的なアルゴリズムは以下である．

(i) データ点群の各点に対して，ある半径の球との共通部分を考えて，それらの共分散行列を直交行列で対角化する．

(ii) 現れる固有値のうち設定した閾値以上の個数を次元，付随する固有ベクトルで張られる空間を接空間と推定する．

(iii) (ii)で取った固有値の次に大きい固有値の固有ベクトル方向を法方向とみなして，接空間上で定義された法方向に値を取る二次関数を点群に最小二乗法で当てはめる．

(iv) (iii)の関数のヘシアンの行列式をその点での曲率として出力する．

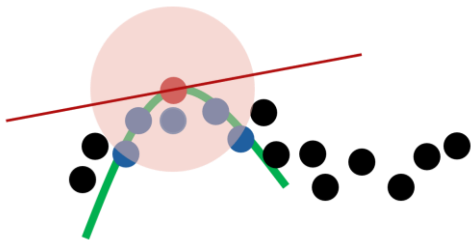

図1：曲率算出アルゴリズムの概要

このアルゴリズムで出力した次元・曲率の例は図2に示されている．適切な球の半径を設定すると多くの点で次元が正しく推定され，曲率の絶対値も期待される通りになることが分かる．実用上は半径の値をあらかじめ適切に設定することは困難なため，パーシステンス加群と同様にその値を動かしパーシステンス的に扱うことで曲率値の発展の情報を得ることができると考えた．しかしながら，半径の値に関する曲率値の関数を有効に活用することは，まだできていない．また，我々は算出した曲率の値を点の座標値に連結して点群データを高次元空間に埋め込み，そこでクラスタリングを行うことで曲率を考慮したクラスタリングも提案した．

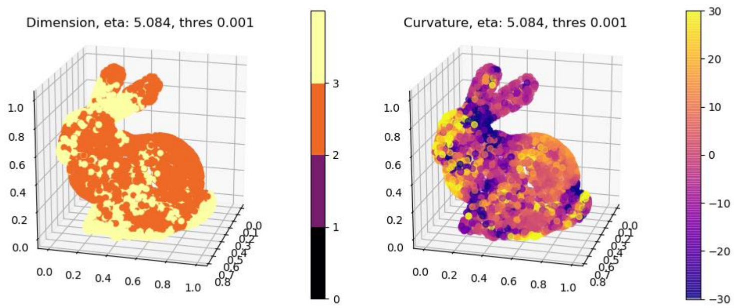

図2：Stanford bunny の点群に関する次元・曲率算出アルゴリズムの出力

本テーマの最終目的である幾何的データ解析の理論の構築には至らなかったが，ベースライン手法の確立は行えたと考える．データ復元や生成モデルへの応用もまだ行えていない

が，図３で示したように一部を分類問題に適用して効果を確かめることができた．

ACT-X 研究を通じて実現したその他の研究

上記の主要なテーマの他に．ACT-X 研究者の平木氏・早瀬氏・坪井領域運営アドバイザーおよび吉脇理雄氏と共同で，空間拡張現実に関係するプロジェクタの配置問題にも取り組んだ．与えられた3次元空間内の曲面を全て照らすようなプロジェクタの配置を決定することは重要な問題であるが，従来の決定アルゴリズムは，プロジェクタが配置可能な位置を探索しながら適切な配置を決めるアプローチが多く，実用上計算量に問題があった．そこで我々は，メッシュから照射可能領域を内積計算して取り出すことによってプロジェクタ配置位置と照らせるメッシュの族が得られるアルゴリズムを開発した．我々はアルゴリズムを実装しシミュレーション実験をして論文（業績リスト(1)の２）にまとめた．この結果に関する論文は国際会議 IEEE VR 2021 のポスター発表に採択された．

3．　今後の展開

研究テーマ1「多次元パーシステンス加群への層理論的アプローチ」については，今後応用面からも多次元パーシステンス加群と層理論の関係にアプローチする必要があると考えている．本研究期間中に多次元パーシステンスの実応用が現れ始めたため，１年程度はこれらの応用も含めた実際の問題を用いて多次元パーシステンス加群のどのような情報を抽出することが有用かを調査する．次の１～２年程度で層理論等を用いてその抽出方法を実現する予定である．

研究テーマ2「曲率を捉える幾何的データ解析手法」については，まずは提案した曲率値の確率・統計的振る舞いについての研究を行う必要がある．この研究には 2022 年度に引き続き浅尾泰彦氏と取り組み，アルゴリズム提案と合わせた論文を執筆したいと考えている．2022 年度中には，必要に応じてアルゴリズムも修正して広く使えるようにコード公開も行いたい．加えて当初の予定であったマグニチュードホモロジーと粗幾何との関係も１～２年程度のスパンで研究を行う予定である．

4．　自己評価

研究目的の達成については当初の計画の一部のみにとどまったものの，独自の視点に立って他の研究者では実現できないような結果が複数得られたと考えている．特に数学内の幾何学分野への応用としては十分な結果が得られた．一方で応用面・社会実装の面からは，それぞれのテーマとも直ちにアルゴリズムを適用可能な状態にはなっておらず課題が残った．

研究の進め方については，本来研究期間中に様々な国内・国外出張を通して共同研究を進める予定であったが，コロナ禍のため実現できなかった．しかしながら，この状況を逆手に取り，国内外の研究者たちとオンラインで議論を行って研究者ネットワークを形成しつつ研究を進めることができたと考えている．特に，ACT-X 研究者との予想外の共同研究で成果が得られたことは本プロジェクト採択の最大の恩恵の一つである．

５． 主な研究成果リスト

（１）代表的な論文（原著論文）発表

研究期間累積件数：４件

1. Tomohiro Asano and Yuichi Ike. Sheaf quantization and intersection of rational Lagrangian immersions. Annales de l'Institut Fourier. In press.
パーシステンス加群に対する層理論的アプローチをシンプレクティック幾何学に応用して，有理的ラグランジュはめ込みの分離エネルギー評価および交叉点の個数の評価を具体的に行った．
2. Takefumi Hiraki, Tomohiro Hayase, Yuichi Ike, Takashi Tsuboi, and Michio Yoshiwaki. Viewpoint Planning of Projector Placement for Spatial Augmented Reality using Star-Kernel Decomposition. Abstracts and Workshops of the 28th IEEE Conference on Virtual Reality and 3D User Interfaces (IEEE VR 2021), pp. 583-584 (2021).
与えられたメッシュをすべて照らせるプロジェクタの配置を決定するアルゴリズムを提案した．メッシュの法線ベクトルとの内積計算に基づき領域を星状集合に分解するアルゴリズムであり従来手法に比べて計算コストの面で利点がある．

（２）特許出願

なし

（３）その他の成果（主要な学会発表、受賞、著作物、プレスリリース等）

口頭発表

1. 層コボルディズムと Tamarkin 圏における距離，Seminar on geometry and related topics，名古屋大学多元数理科学研究科，2019 年 11 月．
2. Microlocal theory of sheaves and displacement energy，日本数学会 2020 年度秋季総合分科会，オンライン，2019 年 9 月．
3. Persistence-like distance on Tamarkin category and displacement energy，Séminaire symplectix，オンライン，2020 年 10 月．
4. 層の圏上のパーシステンス的距離とシンプレクティック幾何における分離エネルギー，第 68 回トポロジーシンポジウム，オンライン，2021 年 8 月．
5. Microlocal sheaf theory and energy estimates in symplectic geometry，第 68 回幾何学シンポジウム，オンライン，2021 年 9 月．