

研究終了報告書

「制御・最適輸送理論の融合による大規模系の制御法開発」

研究期間： 2021 年 10 月～ 2024 年 3 月

研究者：伊藤 海斗

1. 研究のねらい

IoT、センシング技術の発展により、制御対象となるシステムの大規模化が進んでいる。例えばセンサネットワークや群ロボットなどの工学システム、分散型電源を連系した電力系統や交通システムといった社会インフラに至るまで、大規模システム向けの制御技術の必要性がますます高まっており、超スマート社会(Society 5.0)を実現するための、システム制御分野における喫緊の課題となっている。フォーメーション制御、分散制御など、大規模システムに対する制御理論は一定の成果を挙げつつあるが、「大規模システムを**全体最適**に制御するには？」という問題は未解決な部分が多い。

そこで本研究では特に、大規模システムが多数の要素(エージェント)から成る場合に、そのエージェントたちをいかに制御すれば効率よく目標が達成できるか、に着目する。より具体的に取り組む問いは、**エージェント全体で達成すべき状態**(車両の配車やロボット群のフォーメーションなど)が与えられたときに、**どのエージェントをどの状態に/どのように制御すれば全体最適な制御を達成できるか**、である。システム全体の状態を所望の形状・値に制御する上記問題は大規模システムにおける普遍的、かつ取り組む意義が大きい問題と言える。本問題は最適制御問題と最適輸送問題の融合問題として見ることができ、本研究ではこれを「最適輸送制御」と呼ぶことにする。本研究では、最適制御と最適輸送両方の視点をうまく活用することで、実用的な最適輸送制御を支える数理基盤を築くことを目標とする。

2. 研究成果

(1)概要

本研究では特に、制御の実用性につながるリアルタイム性を備えた最適輸送制御手法の研究を行った。さらに、制御において生じる種々の誤差を考慮したロバスト性を有する最適輸送制御の研究に取り組んだ。より具体的な3つのテーマとその背景は以下の通り：

研究テーマ1. モデル予測制御(MPC)を利用したリアルタイム性を有する最適輸送制御

画像処理などに応用されている静的な最適輸送と、本研究で扱う動的システムに対する最適輸送には二つの大きな違いがある。一つ目は、輸送コスト・方法に関するものである。静的最適輸送では、二点間の距離など、簡単に計算できる量を輸送コストとして事前に与え、また実際にどのように輸送するかについては興味がない場合が多い。一方、動的最適輸送では二点間をどう輸送(制御)するかでその輸送コストが変わるため、輸送コスト・方法そのものも決定すべきものとして含まれる。具体的には最適制御により二点間の最適な輸送コスト・方法が与えられるが、最適制御問題を解くこと自体、非常に計算コストがかかるタスクである。二つ目の違いは、外乱やモデル誤差の存在である。動的最適輸送で用いる動的システムのモデルには、多少なりとも誤差(外乱やモデルそのものの誤差など)がある場合がほとんどで、実問題ではこの誤差に対してある種のロバスト性をもつことが重要である。これら二つが動的最適輸送の挑

戦的な点といえる。

本研究ではこれらの難点に対処する一アプローチとして、最適制御をリアルタイムに実行する手法であるモデル予測制御(MPC)に注目した。これは解くことが難しい最適制御問題を初期に全て解くのではなく、比較的解きやすい代わりの最適制御問題を毎時刻解き直して制御入力を決定する方策である。一方で、最適輸送計画の一つの代表的な計算法(Sinkhorn アルゴリズム)では繰り返し計算が行われ、各エージェントの輸送先を表す変数が最適解に向かって更新されていく。本研究では、MPCとSinkhorn アルゴリズムそれぞれの繰り返し計算構造に着目し、それらを適切に統合することでリアルタイム性をもつ最適輸送制御の実現を目指した。

研究テーマ2. 確率分布のエントロピー正則化最適密度制御

各エージェントをどこに輸送するかを考える最適輸送問題は、エージェントの数が増えることで解を得るための計算負荷が増大してしまう。一方、エージェントが非常に多くあるとき、エージェントが無限個あると仮想的に考えることで、エージェント達がどのように分布しているかを確率密度関数でモデリングする考え方がある。これにより、エージェントの分布を思い通りに効率よく制御する問題は、分布を表す確率密度を目標の密度関数へ制御する最適制御問題として定式化できる。このアプローチの利点は、元の問題がもっていた離散最適化的な困難性を回避できることである。一方で、確率密度の最適制御問題は、密度の時間発展式と制御の最適性を記述する方程式(ベルマン方程式)の結合方程式を解く必要があり、数値的に解くことが非常に難しい。そこで本研究では、最適輸送の解を効率よく求める一手法であるエントロピー正則化を、確率密度制御へ新たに導入することで、現実的な計算負荷で最適制御を得ることを目指した。

研究テーマ3. 振動子集団の分布制御

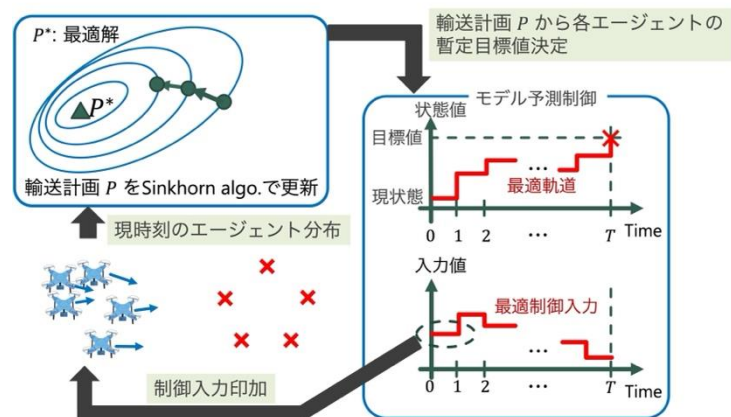
テーマ1、2では、各エージェントが線形な動的システムに従うという抽象的な設定で研究を行っている。本テーマではより具体的な問題として、リズム現象を有する神経細胞の集団が病的なふるまいをしている場合に、健康な状態(分布)へと治療(制御)することを動機とした研究に取り組んだ。無数の振動子分布を表す確率密度を目標密度へと制御する問題として定式化した。が、実用上重要な制約として、全ての振動子は共通の制御入力のみ受け取ることができるという制約を課した。例えば薬や電気刺激の形で制御入力を与える場合、各細胞で別の入力値を与えることは非現実的であるため、この制約を課するのが自然と考えられる。一方この場合、制御の自由度が振動子の数に比べて圧倒的に小さく、与えられた目標分布への制御がそもそも可能なのか(可制御性)が自明ではない。そこで本テーマでは、テーマ1、2で考えた制御の効率性より先に考えるべき問題として、振動子分布の可制御性について解析したとともに、目標密度のできるだけ近い形に振動子分布を制御する手法を提案した。

(2)詳細

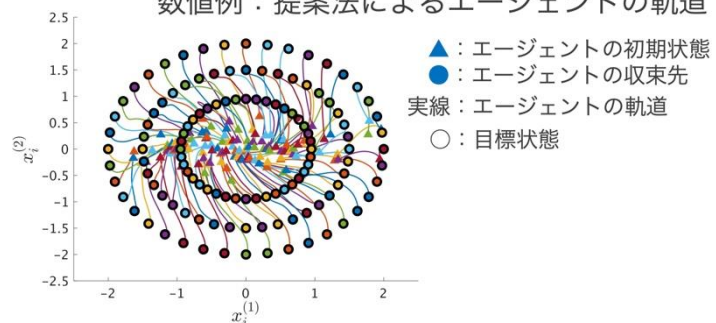
研究テーマ1. MPCとSinkhorn アルゴリズムを統合した輸送制御手法の提案と数値シミュレーションによる有用性の確認、さらに実用上重要な理論的性質をいくつか明らかにした。各時刻でシステムの現状態を考慮して最適制御問題を解き直す MPC の考え方を、最適輸送計画の計算に適用するのが提案手法の一つ目のアイデアである。具体的には各時刻で、エージェン

トの現分布をもとにして最適輸送問題を解き直す。これにより、毎時刻エージェントの分布情報が輸送制御にフィードバックされるため、外乱やモデル誤差でエージェントが想定外の時間発展をしても、輸送計画を練り直すことが可能になり、総輸送コストが増大しづらくなるロバスト性の実現できる。一方で、各時刻で最適輸送計画を求めるのは計算コストが大きくなるため、輸送計画を計算するための Sinkhorn アルゴリズムの繰り返し計算を制御と並行して行うのが提案法の二つ目のアイデアである。具体的には、各時刻で最適輸送計画を求めるために Sinkhorn アルゴリズムが収束するまで計算するのが理想であるが、その計算回数を少数で打ち切り、得られる解は次時刻での初期値として用いる。これにより各時刻での計算負荷を抑えられるとともに、少数で打ち切っても、効率のよい輸送制御が実現できることをシミュレーションにて確認した。この成功はある程度理論的に説明することもできる。さらに、輸送制御の実現、つまり目標分布への収束性に関する理論保証などを与え、提案法の信頼性を向上した。

提案法：MPC + Sinkhornアルゴリズムのイメージ図

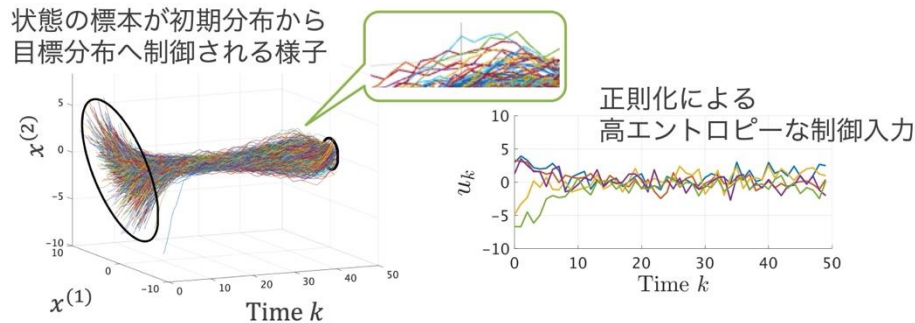


数値例：提案法によるエージェントの軌道



研究テーマ2. エントロピー正則化を密度制御に適用するのは、本研究が初めての試みであるため、まずはシステム制御において最もシンプルかつ重要な問題設定を取り扱った。具体的には、離散時間の線形システム、制御コストは二次形式、初期・目標分布がガウス分布で与えられる密度制御について、コスト関数にエントロピー正則化を施した問題の理論解析を行った。結果として、最適な制御方策を陽に求めることができた。エントロピー正則化がない場合の最適制御は陽な形で知られていなかったため、正則化により解が求まったのは顕著な違いである。さらにその最適制御が、制御コストにより定まるエントロピー正則化最適輸送問題の解になることを示した。最適制御と最適輸送の密接な関係性は連続時間システムにおいては研究されてきたが、離散時間システムの最適制御と最適輸送の繋がりを明らかにしたのは本研究が初と思われる。さらに、エントロピー正則化が消える極限での解析を行うことで、正則化がな

い場合の最適密度制御も陽に導出することができた。



さらに今後、非線形システムや非ガウス分布など、より一般の問題設定で正則化の有効活用をするための準備として、非線形システムの正則化最適制御(分布の制約条件なし)に取り組んだ。一般に非線形システムの最適制御は、ベルマン方程式を解く問題に帰着するが、これは状態量の次元に関する次元の呪いを抱えており、数値計算が困難である。一方で、エントロピー正則化がある場合、変数変換によりベルマン方程式を線形化できることを本研究で示し、モンテカルロ法などの標本生成に基づく手法によってベルマン方程式の解が計算できることを示した。これにより、ベルマン方程式の次元の呪いという原理的な困難性を回避できることが明らかになった。

研究テーマ3. 振動子分布の可制御性解析に取り組んだ。〈一部非公開〉

さらに、目標分布のできるだけ近くへ速やかに振動子分布を収束させる具体的な制御方策を検討した。それを実現する一アプローチとして、周期入力によって振動子分布の定常的な周期軌道が定まることに着目し、その周期軌道と目標分布との距離が小さくなるように、周期入力を最適化する。さらに、定まる定常的な周期軌道へ任意の初期分布から振動子が速やかに収束するようにフィードバック制御入力を設計し、周期入力とフィードバック制御を組み合わせる手法をとった。具体的に、Kullback-Leibler(KL)ダイバージェンスの意味で収束を保証する制御方策を提案した。その有用性は数値シミュレーションで確認している。〈一部非公開〉

提案法のアイデア

目標分布▲近くの周期軌道を設計

(分布の空間)

設計した
周期軌道へ制御

振動子分布

振動子と同じ周期の制御入力

目標▲と周期軌道の隔たりを最小化する
周期軌道を計算

3. 今後の展開

- 研究テーマ1. に関して、MPC と最適輸送を統合するアイデアは汎用性が高く、さらなる発展が見込める。〈一部非公開〉一方で、より実問題に即した方向へ手法を発展させるために、今後はまず小規模な移動ロボット群に提案法を実際に適用することで、本研究

のアイデアがどこまで有効か、そして実用上どのような課題があるかを抽出する。ロボット群の制御では、フォーメーション制御など多くの研究結果があるため、それらを援用しながら、本研究の提案法に関する理論と実問題でのギャップを埋める方向に進む。

- 研究テーマ2. に関して、非線形・非ガウス分布を伴うエントロピー正則化密度制御の解析を今後行う。〈一部非公開〉さらに、本テーマで得た結果はシステムの確率的不確かさを制御する従来の確率制御においても有用である。例えば、システムの確率性を分布として直接制御することで、システムが危険な状態になるリスクを柔軟に調整するなどの応用が考えられる。
- 研究テーマ3. に関して、神経細胞群の制御を意識し、制御の自由度が極端に低い設定を考えた。しかし今回扱った振動子モデルでは、振動子間の結合や自然周波数のズレなどを無視したシンプルなモデルになっており、こういった要素がいかに実際の制御に影響を及ぼすかを検討することは重要な課題である。〈一部非公開〉
- 研究計画時は、輸送制御手法の理論と実用のギャップを埋める役割として、種々の誤差に対するロバスト性の研究を検討していた。実際は、輸送制御における基本的な理論基盤で未整備な部分が多く、さらに計画当初に想定していなかった密度制御におけるエントロピー正則化の活用に関する多くの発見があったため、本研究期間においては輸送制御の理論基盤の整備を優先した。従来の制御手法が実用においてロバストであることが重要とされるように、輸送制御手法においてもある種のロバスト性を保証することが今後の重要な方向性になる。

4. 自己評価

研究目的の達成状況

当初の目的では、現実的な計算負荷で実行できる最適輸送制御手法の開発と、実問題で生じる様々な誤差に対するロバスト性の付加を達成目標としていた。前者に関しては、MPC と Sinkhorn アルゴリズムを統合した独自のアイデアで、リアルタイム性を重視した輸送制御手法を提案、さらにエントロピー正則化を活用した密度制御手法の開拓も成功し、当初の想定を大きく上回る成果が得られたと考えている。また、これらはさらなる改善の余地があり、発展性をもっている。一方で後者に挙げたロバスト性に関して、前者で開発した手法はある種のロバスト性を有すると考えているものの、理論的に正当化するには至っていない。〈一部非公開〉ロバスト性の研究が想定より進まなかった原因は、当初予定していなかった正則化による密度制御の研究に時間を割いたことが大きい。しかし、それに割いた分の成果を得ることができたため、全体としての進み具合は好調であったと考えている。

研究の進め方(研究実施体制及び研究費執行状況)

研究実施者が主導して研究を進めることができた。研究期間中に海外で研究滞在することを当初検討していたが、コロナ禍によりその機会を失ったため、その分予算の余剰が発生した。一方で、国際会議の参加など、研究成果につながる形で適切に研究費執行した。

研究成果の科学技術及び社会・経済への波及効果

大規模エージェントの分布を思い通りに制御したい場面は、配車・物流・ドローンのフォーメー

ション制御・神経細胞の治療など、産業からエンターテインメント、医療に至るまで幅広くある。本研究では特に、現実的な計算負荷での輸送制御に関する様々な知見を得ることができ、上述の応用に向けた確固たる礎になることが見込まれる。一方、振動子制御の研究で分かったとおり、各応用先特有の制約などを輸送制御に取り入れることが応用上重要かつ難しい問題である。今後は応用先分野の方々と協力しながら、輸送制御の課題を抽出・解決していくことが、社会実装のために必要と考えている。

5. 主な研究成果リスト

(1) 代表的な論文(原著論文)発表

研究期間累積件数: 5件

1. Kaito Ito and Kenji Kashima, “Kullback–Leibler control for discrete-time nonlinear systems on continuous spaces,” *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration*, Vol. 15, No. 2, pp. 119–129, 2022.

一般に最適制御方策は、ベルマン方程式の解である価値関数により得られるが、その数値計算は困難であることが多い。その困難性を回避できる特別な問題クラスとして、KL 制御がある。その特徴は、状態遷移分布が制御で変化する度合いを KL ダイバージェンスで定量化し、制御コストとする点にある。KL 制御は離散状態や連続時間連続状態の問題設定で研究されてきたが、本研究では離散時間連続状態の設定における KL 制御に取り組んだ。結果としてこの設定でも、ベルマン方程式が線形化可能であり、価値関数が効率的にモンテカルロ計算できることを示した。

2. Kaito Ito and Kenji Kashima, “Entropic model predictive optimal transport over dynamical systems,” *Automatica*, Vol. 152, Article no. 110980, 2023.

MPC と Sinkhorn アルゴリズムを統合した輸送制御手法を提案、そしてその理論解析を行った。提案法では各時刻において Sinkhorn アルゴリズムの反復計算を行い、輸送計画を更新する。毎時刻、その反復が十分大きな数行える場合、提案法のもとでエージェント分布に関する大域的収束性が成り立つことを示した。さらに計算負荷削減のために反復回数を減らしたとしても、局所的な漸近安定性が成り立つことを示した。提案法の有用性は計算時間などいくつかの側面から数値シミュレーションで検証した。

3. Kaito Ito and Kenji Kashima, “Entropic model predictive optimal transport for underactuated linear systems,” *IEEE Control Systems Letters*, Vol. 7, pp. 2761–2766, 2023.

上述の論文 2 の提案法やその収束性などの理論結果は、各エージェントの状態変数に対して直接制御入力が作用できる(入力値の係数行列が正則)という強い仮定を必要としていた。本論文ではこの仮定を大幅に弱め、各エージェントが可制御という妥当な仮定のみで動作する提案法と、その収束性などの理論結果を与えた。

4. Kaito Ito and Kenji Kashima, “Maximum entropy optimal density control of discrete-time linear systems and Schrödinger bridges,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Early Access.

線形システム、制御コストが二次形式、初期・目標分布がガウス分布で与えられる最適密度制御問題に対してエントロピー正則化を考え、そのときの最適解を陽に与えた。さらにその解

が、あるエントロピー正則化最適輸送(Schrödinger bridge 問題)の解を与えることを示した。

5. Kaito Ito, Haruhiro Kume, and Hideaki Ishii, “Ensemble control of a large population of stochastic oscillators: Periodic-feedback control approach,” to appear in 62nd IEEE Conference on Decision and Control, 2023.

振動子集団の分布制御に取り組んだ。本研究では、目標分布のできるだけ近くへ速やかに振動子分布を収束させる制御を行うことを目標とした。周期入力によって振動子分布の定常的な周期軌道が定まることに着目し、その周期軌道と目標分布との距離が小さくなるように、周期入力を最適化する。さらに、定まる定常的な周期軌道へ振動子が任意の初期分布から速やかに収束するようにフィードバック制御入力を追加する手法を提案した。

(2) 特許出願

研究期間全出願件数： 0 件(特許公開前のものは件数にのみ含む)

(3) その他の成果(主要な学会発表、受賞、著作物、プレスリリース等)

〈受賞〉

- 2023 年度計測自動制御学会 論文賞 “Kullback-Leibler control for discrete-time nonlinear systems on continuous spaces”
- 2022 年度計測自動制御学会 学術奨励賞 研究奨励賞 “離散時間エントロピー正則化最適制御と雑音応答の関係について”
- 第 66 回システム制御情報学会研究発表講演会 学生発表賞 “離散時間線形システムに対するエントロピー正則化最適分布制御”

〈その他〉

- Automatica Editor’s Choice (June 2023) “Entropic model predictive optimal transport over dynamical systems”