公開

研 究 終 了 報 告 書

「大規模混合整数半正定値最適化問題に対する汎用的高速解法の開発」

研究期間： 2021 年 10 月～2024 年 3 月
研 究 者： 小林 健

1． 研究のねらい

本研究は混合整数半正定値最適化問題（Mixed-integer Semidefinite Optimization 問題; MISDO 問題）に関する研究である. MISDO 問題とは「行列変数が半正定値行列である」という半正定値制約と「一部の変数が 0 か 1 の値を取る」という整数制約をもつ最適化問題である. MISDO 問題は半正定値制約を用いて非線形性を, 整数制約を用いて離散性を表現することが可能であり, 現実に現れる様々な最適化問題を統一的に記述できる. このような背景から MISDO 問題に対する解法の必要性は工学分野で広く認識されている. しかし計算機とアルゴリズムの性能の限界から MISDO 問題は実用上求解困難な問題と見なされており, 解法の研究はこれまで積極的に行われていなかった. 近年では分枝限定法に基づく解法を搭載したソルバーが公開されるようにはなったものの, 大規模な MISDO 問題を解くことは依然として困難な状況にある. このような背景から, 本研究課題では大規模な MISDO 問題を解く高速な汎用解法を設計することを目指す.

2． 研究成果

（1）概要

本研究課題は, MISDO 問題に対する高速かつ効率的な解法の開発を目的とする. この目的達成のため, まず MISDO 問題として定式化される特定の問題に対する専用解法の設計に取り組んだ（研究テーマ A）. 続いて開発した専用解法を MISDO 問題の標準形に対して適用可能な汎用解法へ拡張し, その後拡張した解法を個別の問題への応用に取り組んだ（研究テーマ B）. 以下, 各研究テーマの成果の概要について説明する.

研究テーマ A: 特定の混合整数半正定値最適化問題に対する専用解法の設計

ここでは MISDO 問題として定式化される基数制約つき分布ロバストポートフォリオ最適化問題に注目した. この問題は金融工学におけるポートフォリオ最適化モデルで, ポートフォリオのスパース性と不確実性に対するロバスト性を考慮した最適化モデルである. 本研究テーマでは, MISDO 問題として定式化される基数制約つき分布ロバストポートフォリオ最適化問題を 0-1 整数制約上の非平滑な凸関数最小化問題として再定式化し、切除平面法を用いて解く手法を提案した.また行列補完理論を応用して切除平面の生成に必要な計算量を削減できることを示した. 計算機実験では, 提案手法は既存の汎用ソルバーよりも数百倍高速に最適解を得ることが確認され, また求めたポートフォリオの運用成績も既存のモデルより優れた性能を示した.

研究テーマ B: 解法の汎用化と機械学習分野への応用

研究テーマ B では, 研究テーマ A で開発した特定の MISDO 問題に対する解法を拡張し, MISDO 問題の標準形を解く汎用解法の設計に取り組んだ.

<一部非公開>

また開発した汎用解法が有望視される適用対象に対する応用も行った．具体的には，機械学習分野で現れる MISDO 問題に着目し，その問題に対して汎用解法は問題構造を活用して計算量を削減できることを示した．<一部非公開>

（2）詳細

研究テーマ A: 特定の混合整数半正定値最適化問題に対する専用解法の設計

本研究テーマでは，MISDO 問題として定式化される特定の最適化問題に対して，その問題の構造を活用した専用解法を開発した．ここでは Delage and Ye (2010) が提案した分布ロバストポートフォリオ最適化問題に着目し，基数制約つき分布ロバストポートフォリオ最適化問題（図 1）に対する切除平面法を開発した．この問題は確率分布の不確実性とポートフォリオのスパース性を考慮した最適化モデルであり，不確実性集合を表現するための半正定値制約とスパース性を課すための整数制約を含むため MISDO 問題として定式化される（図 1）．

$$
\begin{array}{lll}
\underset{\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}}{\text{minimize}} & \dfrac{1}{2\gamma}\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{x} + \left(\displaystyle\max_{F\in\mathcal{D}(\hat{\mu},\hat{\boldsymbol{\Sigma}},\kappa_1,\kappa_2)} \mathbb{E}_F\left[\mathcal{L}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{\xi}})\right] \right) & \text{[正則化項+損失の期待値の最大値]} \\
\text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} := \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^N \mid \boldsymbol{x}\geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{1}^\top\boldsymbol{x}=1\}, & \text{[ポートフォリオの制約]} \\
 & z_n = 0 \Rightarrow x_n = 0 \quad (n\in[N]), & \\
 & \boldsymbol{z}\in\mathcal{Z}_N^k := \{\boldsymbol{z}\in\{0,1\}^N \mid \boldsymbol{1}^\top\boldsymbol{z}=k\}. & \text{[基数制約]}
\end{array}
$$

図 1 基数制約つき分布ロバストポートフォリオ最適化問題の定式化

本研究テーマでは，まず双対性の理論を用いて基数制約つき分布ロバストポートフォリオ最適化問題を 0-1 整数制約上で非平滑な凸関数最小化問題に等価に再定式化できることを示した．具体的には，基数制約つき分布ロバストポートフォリオ最適化問題における連続変数と 0-1 変数を分離し，0-1 変数を固定した子問題（今回の場合，半正定値最適化問題）の双対問題を導出する．この結果 0-1 変数に関して最適化を行う親問題の目的関数が非平滑な凸関数であることが示される．この再定式化によって，元の問題を解くアルゴリズムとして親問題の目的関数を線形関数で逐次下側近似して解を探索する切除平面法が設計できるようになる．

続いて，本研究では問題特有の構造を活用して切除平面法の計算量を削減できることを示した．今回の基数制約つき分布ロバストポートフォリオ最適化問題に対する切除平面法では，切除平面の生成のために子問題として整数変数を固定した半正定値最適化問題を解く．したがって，投資対象の候補銘柄が多数の場合，解くべき子問題の求解が低速となり切除平面法全体の計算効率が悪化する．ここで，子問題として解く問題は投資する銘柄を固定したポートフォリオ最適化問題を解くことに対応する．そこでこの性質に着目し，本研究テーマでは行列補完理論によって子問題の変数のうち投資する銘柄に対応する変数のみ最適化する縮小した問題を解くことによって切除平面を生成できることを示した．これにより切除平面法の各反復で計算する劣勾配の計算量が候補資産数の総数ではなく投資可能銘柄の上限数のみに依存するようになり，候補資産数が大きい問題でも劣勾配が高速に計算できる．

研究テーマでは提案手法の有効性を検証する計算実験として，既存解法との性能比較を行った．この実験では MISDO 問題を解く既存の汎用ソルバー SCIP-SDP との比較を行い，実データを用いた複数の問題例において提案手法は SCIP-SDP よりも高速に最適解を得ることが確認された（表 1）．特に SCIP-SDP では 1 時間かけても計算が終了しなかった大規

模な問題例に対しても提案手法は数秒で最適解を得られたケースがあり，大規模な問題例で提案手法は有効であることが確認された．

表 1 切除平面法と SCIP-SDP の計算時間の比較

データ名	N	手法	目的関数値	相対ギャップ	計算時間	切除平面数	ノード数
ind49	49	SCIP-SDP	3.036	0.0	303.2	—	17
		切除平面	3.034	0.0	400.6	22	20
		切除平面+行列補完	3.034	0.0	9.3	22	20
port2	86	SCIP-SDP	1.761	8.7	>3600	—	>20
		切除平面	1.924	188.6	>3600	>20	>39
		切除平面+行列補完	1.727	51.6	>3600	>7937	>147890
sbm100	100	SCIP-SDP	3.955	0.4	>3600	—	>10
		切除平面	3.935	0.0	1753.4	5	1
		切除平面+行列補完	3.935	0.0	2.0	5	1
port5	225	SCIP-SDP	∞	100.0	>3600	—	>1
		切除平面	OM	—	—	—	—
		切除平面+行列補完	2.687	0.0	84.6	191	2077
s&p500	468	SCIP-SDP	OM	—	—	—	—
		切除平面	OM	—	—	—	—
		切除平面+行列補完	0.910	19.1	>3600	>1996	>118070

また，米国株式の週次データを用いて運用成績の検証も行った．この実験では,平均分散モデルや等分散投資といった既存のモデルで求めたポートフォリオと，基数制約つき分布ロバスト最適化モデルを解いて求めたポートフォリオの比較を行った．この実験では提案モデルを解いて求めたポートフォリオが収益率･リスク尺度の両面で他のモデルよりも優れた結果を残し，ポートフォリオのロバスト性とスパース性を同時に考慮した最適化モデルが有効であることが実験的に示された（表 2）.

表 2 運用成績の比較

Model	k	CR	Ave(%)	Std(%)	90%-VaR(%)	90%-CVaR(%)	SR
EW		5.063	0.211	2.982	8.873	12.292	0.029
RO	5	5.171	**0.212**	2.966	9.232	11.960	0.030
	N	4.917	0.204	2.864	8.519	11.912	0.028
DR	5	**5.294**	0.198	**2.318**	**6.019**	**9.876**	**0.032**
	N	4.947	0.191	2.340	6.373	10.120	0.029

研究テーマ B: 解法の汎用化と機械学習分野への応用

研究テーマ A で開発した解法の枠組みは金融工学分野で現れる MISDO 問題に対する専用解法であった．本研究テーマでは研究テーマ A で開発した解法を MISDO 問題の標準形に対する解法として拡張し，一般の MISDO 問題に対して適用可能な汎用解法を構築する．そして汎用化した解法が有効に動作する問題の構造を考察し，個別分野で現れる MISDO 問題への応用を行う.

本研究テーマでは，まず研究テーマ A で開発した切除平面法を MISDO 問題の標準形に対する解法として拡張した. <一部非公開>

続いて，MISDO 問題として定式化される問題の中でどのような問題に対して汎用解法が性能面で有望視されるか調査を行った．具体的には工学分野で MISDO 問題として定式化される問題群を調査し，実用的な問題で頻出する MISDO 問題の問題構造について調べた．その結果，機械学習分野で現れる MISDO 問題において問題構造を活用して汎用解法を高速化する可能性があることが明らかになった．そこでこの調査結果から，本研究テーマでは開発し

た汎用解法を機械学習分野で現れる MISDO 問題に応用した. ここでは対象とする問題構造を活用して解法を高速化できることを示し, 数値実験によりその効果を検証した.
＜一部非公開＞

3. 今後の展開

解法の汎用化と機械学習分野への応用については, まだ当初の目的の完遂には至っていない. 現在は提案解法と既存解法の性能比較のための計算機実験を進めている段階であり, 次の 1 年以内で査読つき国際学術雑誌への投稿･掲載を目指す. またそれと同時に研究期間終了後 1,2 年間は汎用解法が有望視される問題で共通する構造に関する知見の蓄積を継続し, 現時点より広範な MISDO 問題を高速に解く解法の開発に取り組むことも考えている.

また本研究課題で得られた副産物として, 研究テーマ A の成果で基数制約つき分布ロバストポートフォリオ最適化モデルが収益率とリスク尺度両面で優れた性能を示した点が挙げられる. 近年, 金融工学分野では分布ロバスト最適化モデルの研究が活発に行われており, 本研究課題で扱った Delage and Ye (2010) 以外にも様々な分布ロバスト最適化モデルが提案されている. そこで次の 2,3 年のうちに, 本研究で開発した解法を他の分布ロバスト最適化モデルに基数制約を追加した問題の解法としても拡張することを考えている.

4. 自己評価

研究目的の達成状況

本研究課題の目的は MISDO 問題に対する実用性をもつ汎用解法の設計であった. ここで金融工学や機械学習で現れる一部の MISDO 問題では大規模な問題例の求解に成功したものの, MISDO 問題の幅広い問題に対して性能が高い解法の開発を実現にはまだ至っていない. したがって研究目的の達成状況については, 研究期間当初の計画の一部のみの達成に留まったと考えている. 一つの反省点としては, 研究テーマ A に関する論文投稿時に, 査読対応のための数値実験で当初の想定より時間を要してしまい, 続く研究テーマ B に割ける時間が影響を受けたという点があげられる.

研究の進め方（ 研究実施体制及び研究費執行状況 ）

研究の進め方については, 主に国内の共同研究者と定期的な議論の場を設けた. これが研究の推進に大きく貢献した. また研究期間中は様々な国際会議に参加して研究成果の発信も積極的に行なった. このような国際会議への参加は海外の研究者とのネットワーク構築に役立ち, 研究期間中に始まった共同研究は今後も継続する予定である. 研究費の執行状況については, おおむね当初の計画通りに研究費を執行した.

研究成果の科学技術及び社会･経済への波及効果

本研究課題の成果として, MISDO 問題として定式化される一部の最適化問題に対して従来の汎用ソルバーよりも高速に求解可能な解法を設計することができた. これらの成果で得られた計算高速化の知見や問題構造に対する知見は, 今後 MISDO 問題に対するより洗練された汎用解法を開発する際の設計指針を与えると考えられる. また, 研究期間中は金融工学や機械学習分野で現れる MISDO 問題を扱ったため, これらの領域においても本研究課題の成果は今後広く波及されると期待される.

公開

5. 主な研究成果リスト

（1）代表的な論文（原著論文）発表

研究期間累積件数： 1 件

1. K. Kobayashi, Y. Takano, and K. Nakata: Cardinality-constrained distributionally robust portfolio optimization. European Journal of Operational Research, 309 (2023), 1173–1182.
基数制約つき布ロバストポートフォリオ最適化モデルを MISDO 問題として定式化し，高速な切除平面法を提案した．数値実験により従来手法より優れた計算性能と運用成績を示した．
2.
3.

（2）特許出願

研究期間全出願件数： 件（特許公開前のものは件数にのみ含む）

1	発 明 者	
	発明の名称	
	出 願 人	
	出 願 日	
	出願番号	
	概 要	

（3）その他の成果（主要な学会発表、受賞、著作物、プレスリリース等）

［招待講演］

小林健:混合整数半正定値最適化問題に対する切除平面法とその周辺．第 34 回 RAMP 数理最適化シンポジウム，秋田拠点センターALVE, 2022 年 10 月．

［受賞］

小林健: 第 13 回研究賞奨励賞．日本オペレーションズ・リサーチ学会, 2023 年 9 月.

小林健: 令和 4 年度 手島精一記念研究賞(博士論文賞)．東京工業大学, 2023 年 4 月.

［解説記事］

小林健: 基数制約つき平均・分散モデルに対する切除平面法．オペレーションズ・リサーチ, 67 (2022), 360–365.